IV.1

Uwagi metodyczne

Na realizację tematu przewidziano 2 godziny lekcyjne.

Wyrażenia algebraiczne są wstępem do nowego dla uczniów języka matematyki, z którym wielu z nich ma kłopoty przez cały okres szkolnej edukacji.
Uczniowie stykali się z zapisem algebraicznym przy okazji różnych wzorów, np. na pola figur, ale wyrażenia algebraiczne nie są wzorami. Są nowym matematycznym sposobem opisu zjawisk.
Badania pokazują, że wprowadzanie wyrażeń algebraicznych jest jednym z pierwszych momentów, w których u niektórych dzieci załamuje się rozumienie matematyki. Nie nadążają one za tokiem lekcji, nie wszystko rozumieją, a trudności się nawarstwiają. Niezwykle istotna jest więc wnikliwa obserwacja uczniów. Ponadto uczniowie powinni wykonywać możliwie dużo ćwiczeń dotyczących obliczania wartości wyrażeń algebraicznych.

UMIEJĘTNOŚCI

Uczeń już potrafi:

- korzystać z nieskomplikowanych wzorów, w których występują oznaczenia literowe; zamieniać wzór na opis słowny
- stosować oznaczenia literowe nieznanych wielkości liczbowych i zapisywać proste wyrażenia algebraiczne na podstawie informacji praktycznych

Uczeń będzie umiał:

- zapisywać wyniki podanych działań w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych
- rozpoznawać równe wyrażenia algebraiczne
- obliczać wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych
- zapisywać zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych
- zapisywać rozwiązania zadań w postaci wyrażeń algebraicznych


WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE
Rozdział IV

1 Od wzorków do wzorów

Na dobry początek

Janek zszywa patchwork z kwadratowych kawałków materiału. Na każdym połączeniu czterech kawałków doszywa ozdobny kwiatek. Oto kolejne etapy pracy.

Pytania i polecenia

- Ile kwiatków należy przyszyć na patchwork 5 kwadratów × 5 kwadratów? Spróbuj to przewidzieć, a następnie wykonaj rysunek pomocniczy i sprawdź swoją odpowiedź.
- A ile na ogromny patchwork 30 kwadratów × 30 kwadratów?

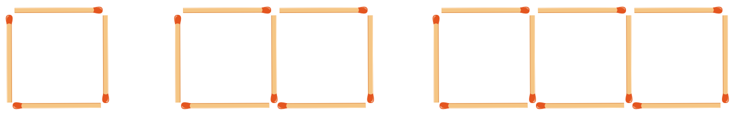
172

Odpowiedzi

- 9 kwiatków. Potrzebne jest spostrzeżenie, że jeśli zszywamy $n \times n$ kwadratów, to poziomych linii szwów jest $n - 1$, linii pionowych też $n - 1$. Skrzyżowań, na których są kwiatki, jest wobec tego $(n - 1)^2$. Jest o tym mowa też na s. 180.
- Dla 30 × 30 kwadratów skrzyżowań linii, czyli kwiatków jest $29^2 = 841$.

Rozdział	I (18 godzin)							II (13 godzin)							III (28 godzin)											
Temat	1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	P
Godziny lekcyjne (razem 125)																										
Miesiące	IX					X						XI					XII						I			
Semestr	I – 59 godzin																									

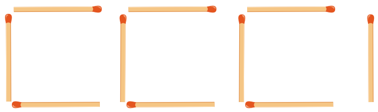
Przyjrzyj się rysunkom.



1 kwadrat – 4 zapałki   2 kwadraty – 7 zapałek   3 kwadraty – 10 zapałek

Ilu zapałek potrzeba, aby w ten sam sposób ułożyć cztery kwadraty, pięć kwadratów oraz sześć kwadratów? A ilu – aby ułożyć sto kwadratów w jednym rzędzie? A tysiąc kwadratów? W tym przypadku rysowanie byłoby zbyt pracochłonne. Możemy to obliczyć znacznie szybciej, jeśli zauważymy **ogólną zależność**, pozwalającą znaleźć liczbę zapałek dla dowolnej liczby kwadratów.

Każdy kwadrat składa się z trzech zapałek (bo czwarty bok należy już do następnego kwadratu). Dopiero na końcu musimy dodać jeszcze jedną zapałkę, żeby zamknąć rysunek.



Możemy powiedzieć: „Łącznie jest trzy razy tyle zapałek, ile kwadratów, i jeszcze jedna". Żeby unikać takich długich opisów słownych, w matematyce dla uproszczenia stosujemy symbole literowe. Jeśli liczbę kwadratów oznaczymy literą n, możemy zapisać liczbę zapałek jako

$$\underbrace{3 \cdot n}_{\text{trzy razy tyle, ile kwadratów}} \;+\; \underbrace{1}_{\text{jeszcze jedna zapałka}}$$

trzy razy tyle, ile kwadratów i jeszcze jedna zapałka

Wyrażenia algebraiczne

Przypomnijmy, że zapis jednego lub kilku działań na liczbach, np.:

$3 \cdot 5 + 1$ $3 - 8$ $17 \cdot (15 : 5 \cdot 23 - 14 : 5) - 12$

nazywamy **wyrażeniem arytmetycznym**.

Szerszym pojęciem jest **wyrażenie algebraiczne**. Mogą w nim wystąpić nie tylko konkretne liczby, lecz także litery zastępujące liczby, np.:

$3 \cdot n - 1$ $a - b$ $x \cdot (15 : m \cdot n^3 - m : 5) - r$

Słowo ***arytmetyka*** pochodzi z języka greckiego, a słowo ***algebra*** – z języka arabskiego.

Zapamiętaj

W wyrażeniach algebraicznych oprócz (lub zamiast) liczb mogą się pojawiać także litery.

Na przykładzie zapałczanych układanek pokazano, że od konkretnej sytuacji można przejść do ogólnego stwierdzenia prawidłowości, w której opisie już nie występują liczby, bo zostały zastąpione literami. Nie tylko słabszym uczniom przyda się samodzielne przygotowanie podobnych przykładów, nawet prostych. Każdy przykład zaproponowany przez ucznia należy przeanalizować i omówić. Ułatwi to uczniom stopniowe przechodzenie na wyższy, bardziej abstrakcyjny poziom rozumienia i stosowania matematyki.

Definicja wyrażenia algebraicznego, zwłaszcza na początku, może być dla uczniów niezrozumiała. Uczniowie mogą nie wiedzieć: czy litera a w dwóch różnych wyrażeniach oznacza tę samą liczbę, czy można ją zastąpić literą b, czy wyrażenie $a \cdot b$ oznacza to samo co wyrażenie $c \cdot d$ itd. Takich wątpliwości może być wiele. Trzeba też pamiętać, że nie zawsze uczniowie potrafią je wyartykułować. Dlatego kształtowanie tych pojęć wymaga uważnej obserwacji zachowań uczniów.

Złote myśli

Nauczanie zaczyna się wtedy, kiedy ty – nauczyciel – uczysz się od ucznia, stawiasz się w jego położeniu tak, abyś mógł zrozumieć, co on rozumie, i poznać sposób, w jaki to czy owo pojmuje.

Søren Kierkegaard

IV (18 godzin)							V (16 godzin)						VI (13 godzin)					VII (11 godzin)					Łączna liczba godzin do dyspozycji nauczyciela
1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	P	1	2	3	4	P	1	2	3	4	P	
II					III				IV				V					VI					

II – 63 godziny

Przykład opisany za pomocą tabeli należy przeanalizować z uczniami, bo wyjaśnia on klarownie, kiedy mamy do czynienia z wyrażeniem algebraicznym, a kiedy z jego wartością liczbową. Odnosi się do realnej sytuacji (budowania kwadratów z zapałek według pewnej zasady), więc i zapis wyrażenia, i szukanie jego wartości powinny być dla uczniów zrozumiałe. Inaczej rzecz się ma w przykładzie 1. i odpowiadającym mu ćwiczeniu. Nie odwołują się one do realnych sytuacji, co może stanowić przeszkodę mentalną, szczególnie dla uczniów mniej zaawansowanych matematycznie. Warto zatem skłonić uczniów do samodzielnego wymyślania przykładów wyrażeń algebraicznych i obliczania ich wartości liczbowych dla liczb, które sami ustalili.

Litery w takim wyrażeniu nazywamy **zmiennymi**. Na przykład zmienną w rozważaniach dotyczących układania kwadratów z zapałek jest litera n.
Słowo „zmienna" oznacza, że n może się zmieniać: czasem oznacza liczbę 2, czasem liczbę 3, a kiedy indziej 100. Dzięki temu, wykonując jeden raz obliczenia na symbolach literowych, możemy rozwiązać zadanie dla różnych danych.

Wartość wyrażenia algebraicznego

Wyrażenie algebraiczne nie oznacza żadnej konkretnej liczby. Kiedy jednak określimy, jaką liczbę symbolizuje zmienna, wyrażenie zyskuje określoną wartość liczbową. Popatrzmy na przykład, jakie wartości przyjmuje wyrażenie $3 \cdot n + 1$ dla różnych wartości n.

n kwadratów	$(3 \cdot n + 1)$ zapałek	Z ilu zapałek zrobimy te kwadraty?
$n = 1$	$3 \cdot n + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$	1 kwadrat zrobimy z 4 zapałek.
$n = 2$	$3 \cdot n + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$	2 kwadraty zrobimy z 7 zapałek.
$n = 3$	$3 \cdot n + 1 = 3 \cdot 3 + 1 = 9 + 1 = 10$	3 kwadraty zrobimy z 10 zapałek.
$n = 100$	$3 \cdot n + 1 = 3 \cdot 100 + 1 = 301$	100 kwadratów zrobimy z 301 zapałek.
$n = 1000$	$3 \cdot n + 1 = 3 \cdot 1000 + 1 = 3001$	1000 kwadratów zrobimy z 3001 zapałek.

Zapamiętaj

Aby obliczyć wartość wyrażenia algebraicznego, zastępujemy zmienne odpowiednimi wartościami liczbowymi i wykonujemy działania arytmetyczne.

Przykład 1

Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $x \cdot (x + 2)$ dla $x = 3$

Przepisujemy wyrażenie. Zamiast litery oznaczającej zmienną wpisujemy odpowiednią liczbę – wartość tej zmiennej, a następnie wykonujemy działania.

$x \cdot (x + 2) = 3 \cdot (3 + 2) = 3 \cdot 5 = 15$

b) $5 \cdot x^2 + 1$ dla $x = -2$

Podstawiamy podaną wartość zmiennej w miejsce x. Zwróć uwagę, że -2 wpisujemy w nawiasie, ponieważ do kwadratu podnosimy całą liczbę x, czyli -2. Następnie wykonujemy działania.

$5 \cdot x^2 + 1 = 5 \cdot (-2)^2 + 1 = 5 \cdot 4 + 1 = 20 + 1 = 21$

c) $(x^2 - 1) \cdot y$ dla $x = -5$, $y = 3$

Tym razem mamy dwie zmienne – w miejsce każdej z nich podstawiamy odpowiednią liczbę.

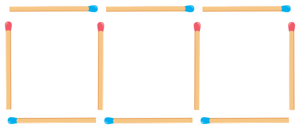
$(x^2 - 1) \cdot y = ((-5)^2 - 1) \cdot 3 = (25 - 1) \cdot 3 = 24 \cdot 3 = 72$

Ćwiczenie 1

Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.
a) $12s + l$ dla $s = 4$ i $l = 2$ b) $6ab + 1$ dla $a = 4$ i $b = -2$

Równość wyrażeń algebraicznych

Zadanie dotyczące budowania kwadratów z zapałek można rozwiązać także w inny sposób. Policzmy osobno zapałki ułożone poziomo i pionowo. Zapałek ułożonych poziomo na górze jest tyle, ile kwadratów, czyli n – tyle samo jest ich na dole. Natomiast zapałek pionowych jest o jedną więcej niż kwadratów, czyli $n + 1$.



W sumie zapałek jest: $\underbrace{n}_{\text{góra}} + \underbrace{n}_{\text{dół}} + \underbrace{(n + 1)}_{\text{ułożone pionowo}}$

Wcześniej opisaliśmy liczbę zapałek w n kwadratach za pomocą wyrażenia $3 \cdot n + 1$. Ale skoro mamy tu inne rozwiązanie tego samego zadania, to dla każdej liczby wstawionej w miejsce zmiennej n wartość każdego z tych dwóch wyrażeń musi być taka sama, np. dla $n = 100$ otrzymamy:
$n + n + (n + 1) = 100 + 100 + (100 + 1) = 301$ i $3 \cdot n + 1 = 3 \cdot 100 + 1 = 301$.
W takiej sytuacji mówimy, że dwa wyrażenia **są równe**. Zapisujemy to:
$3 \cdot n + 1 = n + n + (n + 1)$.
Natomiast np. wyrażenia $3 \cdot n + 1$ i $n^3 + 1$ nie są równe: wprawdzie dla $n = 0$ oba mają wartość 1, lecz np. dla $n = 1$ pierwsze z nich ma wartość 4, a drugie – wartość 2.

Wyrażenia algebraiczne w geometrii

Z wyrażeniami algebraicznymi mieliśmy do czynienia już od czwartej klasy przy obliczaniu pól figur, na przykład: $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$, $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$.
Kiedy obliczamy pole figury, korzystając ze wzoru, to obliczamy wartość wyrażenia algebraicznego dla konkretnych wartości zmiennych, czyli długości odpowiednich odcinków w tej figurze.

Przykład 2

Pole deltoidu o przekątnych a i b można obliczyć ze wzoru: $P = \frac{a \cdot b}{2}$. Oblicz pole deltoidu o przekątnych $a = 10$ cm i $b = 20$ cm.
Podstawiamy dane do wzoru:
$P = \frac{10\text{ cm} \cdot 20\text{ cm}}{2} = 100\text{ cm}^2$.

175

Odpowiedzi

Ćwiczenia 1. a) 50 b) −47

Dodatek do ćwiczenia 1.

Zanim uczniowie przejdą do obliczeń, powinni rozważyć, co mogło zostać oznaczone literami, np.:
$12s + l$ – Tomek kupił 12 samochodzików i 1 lizak.
Wtedy informacja z zadania: $s = 4$, $l = 2$, nabiera sensu – jest ceną tych samochodzików i lizaka w złotych, a pytanie do zadania brzmi: „Ile Tomek wydał na zakupy?”. Taka interpretacja będzie trudniejsza w przypadku b), ale możliwa. Pozwólmy uczniom na takie ćwiczenia.

Pojęcie równości dwóch wyrażeń algebraicznych początkowo może być niejasne dla wielu uczniów, więc warto przeanalizować wyjaśnienie opisane w podręczniku, a następnie zachęcić uczniów do podawania przykładów. Wszystkie te przykłady, również niepoprawne, należy analizować na forum klasy, bo tylko wówczas uczniowie zrozumieją, jak je rozpoznawać. Te ćwiczenia są ważne ze względu na kształtowanie pojęcia równania.
Dobrym sposobem na utrwalanie pojęć wyrażenia algebraicznego i jego wartości jest wykorzystanie znanych wzorów geometrycznych jako przykładów wyrażeń algebraicznych. Polećmy uczniom szkicowanie rozmaitych wielokątów (np. równoległoboków), których pole należy obliczyć, oznaczanie literami na rysunkach tych wielkości, które są potrzebne do obliczenia pola, zapisywanie wzoru według przyjętych oznaczeń i wreszcie obliczanie wartości pola dzięki odpowiednim pomiarom i wstawieniu liczb do utworzonego wyrażenia. Narysowane figury będą się różnić wymiarami, ale wzór na ich pola jest jeden, choć mogą w nim występować inne litery.

Dodatkowe zadania

Popatrzmy na wzory z zapałek.

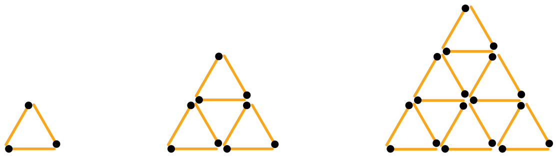
1. Z 3 zapałek można ułożyć jeden trójkąt, ale z 5 zapałek możemy ułożyć 2 trójkąty.

$1 + 2 \cdot 1 = 3$ $\qquad$ $1 + 2 \cdot 2 = 5$

Z ilu zapałek można ułożyć 7 trójkątów leżących jeden za drugim? Z ilu zapałek można w taki sam sposób ułożyć n trójkątów?

2. Z 4 zapałek można ułożyć jeden kwadrat, ale z 7 zapałek możemy ułożyć 2 kwadraty. Z ilu zapałek można ułożyć 7 kwadratów leżących jeden za drugim? Z ilu zapałek można w taki sam sposób ułożyć n kwadratów?

3. Budujemy „domki” z zapałek. Najwyższe piętro to 1 trójkąt; do jego budowy potrzeba 3 zapałek. Niższe piętro to 3 trójkąty, ale aby powstały, wystarczy dobudować 2 trójkąty. I tak dalej.



Ile zapałek potrzeba do zbudowania 7-piętrowego domku? Ile do zbudowania domu 11-piętrowego? A ile do zbudowania n pięter?

Odpowiedzi

1. z 15 zapałek; z $1 + 2n$ zapałek

2. z 22 zapałek; z $1 + 3n$ zapałek

3. 7 pięter:

$3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 =$

$= 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 84$;

11 pięter: $3(1 + 2 + ... + 11) = 198$;

n pięter: $3(1 + 2 + ... + n)$ – na tym zapis można zakończyć, uczeń odkrył metodę obliczania

Ćwiczenie 2.1

Oblicz pole trapezu o podstawach $a = 2$ cm, $b = 5$ cm i wysokości $h = 2{,}5$ cm.

Niektóre wzory zapisywaliśmy na kilka sposobów. Na przykład pole trapezu można zapisać jako:

$\frac{a+b}{2} \cdot h$ albo $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$.

Oznacza to, że posługiwaliśmy się równymi wyrażeniami algebraicznymi.

W wyrażeniach algebraicznych często pomijamy znak mnożenia, podobnie jak między liczbą a pierwiastkiem (np. $2\sqrt{5}$). Na przykład zapisy: $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$ i $\frac{1}{2}(a + b)h$ oznaczają to samo wyrażenie.

Ćwiczenie 2.2

Które z wyrażeń opisują pole trójkąta o podstawie a i wysokości h?

I. $\frac{1}{2}ah$ $\qquad$ II. $\frac{ah}{2}$ $\qquad$ III. $\frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2}$

Wyrażenia algebraiczne i pieniądze

Przykład 3

Jabłka kosztują 3,20 zł za kilogram, a gruszki 4,50 zł za kilogram. Ile zapłacimy za x kilogramów jabłek i y kilogramów gruszek? Zapisz wyrażenie algebraiczne, a następnie wykonaj obliczenia dla $x = 2$ i $y = 3$.

Aby obliczyć, ile trzeba zapłacić za jabłka, mnożymy ich masę x przez cenę za 1 kg: $x \cdot 3{,}2$ zł.

Podobnie obliczymy, ile trzeba zapłacić za gruszki: $y \cdot 4{,}5$ zł.

W sumie zapłacimy: $x \cdot 3{,}2$ zł $+\ y \cdot 4{,}5$ zł.

Dla $x = 2$ i $y = 3$ suma wyniesie:

$x \cdot 3{,}2 + y \cdot 4{,}5 = 2 \cdot 3{,}2 + 3 \cdot 4{,}5 = 6{,}4 + 13{,}5 = 19{,}9$ [zł].

Za 2 kg jabłek i 3 kg gruszek zapłacimy 19,9 zł.

Ćwiczenie 3

Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego ogólny koszt zakupu biletów do teatru: n biletów normalnych po 60 zł i u biletów ulgowych po 30 zł. Oblicz wartość zapisanego wyrażenia dla $n = 2$ i $u = 25$. Co oznacza otrzymana wartość?

CENNIK BILETÓW

Bilet normalny 60 zł

Bilet ulgowy 30 zł

Bilet w loży VIP 100 zł

Odpowiedzi

Ćwiczenia 2.1. 8,75 cm^2 **2.2.** I i II **3.** $60n + 30u$, 870 zł

Wyrażenia algebraiczne stosuje się m.in. w **arkuszach kalkulacyjnych**. Jeśli umiemy zapisać wyrażenie opisujące to, co chcemy obliczać, to rachunki (dla różnych danych) może za nas wykonać program komputerowy.

Po włączeniu takiego programu widzimy na ekranie dużą tabelę. W każde z jej pól (komórek) można wpisać liczbę lub tekst, a także wyrażenie algebraiczne, do którego komputer podstawi wartości zmiennych wpisanych w innych komórkach. Trzeba tylko pamiętać, że zamiast liter takich jak x czy y na oznaczenie zmiennych używamy nazw pól, w których znajdują się wartości zmiennych (np. B5 to pole w kolumnie B i wierszu 5).

Kwotę 6,4 komputer obliczył na podstawie wyrażenia B5*C5, czyli

„pomnóż liczbę w kolumnie B i wierszu 5

przez liczbę w kolumnie C i wierszu 5".

Łączna kwota została obliczona w komórce D8 za pomocą wyrażenia D5+D6.

D5 | fx =B5*C5

	A	B	C	D
1				
2	Owoce	Waga	Cena za 1 kg	Do zapłaty
3		(kg)		(zł)
4				
5	jabłka	2	3,2	6,4
6	gruszki	3	4,5	13,5
7				
8				19,9

Gdy wpiszemy inną liczbę w komórce B5 albo C5 (czyli zmienimy cenę jabłek albo ich masę), automatycznie zmienią się wartości w komórkach D5 (kwota do zapłaty za jabłka) oraz D8 (łączny koszt zakupów).

Z. ĆWICZEŃ
1–4
5–7

Zadania

ZB. ZADAŃ
1–8
9–14
15–21

1. Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A ← P1a

a) $4k-8$ dla $k=1\frac{1}{2}$ d) $2x+x^2$ dla $x=4$ g) $\frac{2}{5}(y+3)^2$ dla $y=7$

b) $\frac{2}{3b-2}$ dla $b=3$ e) p^2-p^3 dla $p=2$ h) $t(t+2)$ dla $t=5$

c) $\frac{a^2+5a}{6}$ dla $a=3$ f) $3m-1$ dla $m=0{,}8$ i) $\frac{3z^2-2z}{153}$ dla $z=0$

poziom B ← P1b

a) $5m+m^2$ dla $m=-3$ d) $3x^2+2x$ dla $x=-1$ g) $y(y+3)$ dla $y=-4$

b) $\frac{4{,}5+2b^2}{3}$ dla $b=-0{,}5$ e) $\frac{-7}{8-4a}$ dla $a=-1\frac{1}{2}$ h) $\frac{3}{4}(t-2)^2$ dla $t=-6$

c) k^2-k^3 dla $k=-2$ f) $2(4p+1)-5$ dla $p=-3$ i) $\frac{4z-2}{11}$ dla $z=-\frac{1}{2}$

Odpowiedzi

Zadania 1. poziom A a) -2 b) $\frac{2}{7}$ c) 4 d) 24 e) -4 f) 1,4 g) 40 h) 35 i) 0
poziom B a) -6 b) $\frac{5}{3}$ c) 12 d) 1 e) $-\frac{1}{2}$ f) -27 g) 4 h) 48 i) $-\frac{4}{11}$

Na tej lekcji uczniowie powinni się nauczyć zapisywania rozmaitych zależności za pomocą wyrażeń algebraicznych oraz obliczania ich wartości liczbowych. Oprócz zależności, jakie zachodzą między odpowiednimi wymiarami wielokątów a ich polami, dobrymi przykładami są zależności między cenami towarów a kosztem ich zakupu. Warto sięgać do arkusza kalkulacyjnego, za pomocą którego łatwiej i szybciej wykonuje się obliczenia, pod warunkiem jednak, że umie się do niego wprowadzać dane i odpowiednie wyrażenia algebraiczne. Można się spodziewać, że nie będzie to trudne dla uczniów, więc pozwólmy im na kilka minut własnej aktywności. Warto powiedzieć uczniom, że formuły wpisywane w arkuszach kalkulacyjnych to nic innego jak po prostu wyrażenia algebraiczne.

Zadanie z kluczem

Poziomy:
A – jedna zmienna dodatnia,
B – jedna zmienna ujemna,
C – dwie zmienne.

IV.1

Zadania utrwalające dostarczają dużo materiału ćwiczebnego. Podczas ich rozwiązywania warto zapytać uczniów, które zadania są dla nich łatwe, a które sprawiają kłopoty. Można klasę podzielić na niewielkie grupy i każdej grupie przydzielić porcję zadań. Po ich wykonaniu przedstawiciele grup prezentują w klasie swoje rozwiązania. Niektórym grupom zaproponujmy obmyślenie sensownej zmiany w przydzielonych zadaniach (inne pytanie, inne dane).

Uwaga do zadania 3.

W tym zadaniu mamy wielkości mianowane o różnych jednostkach. Należy zwrócić uwagę, że przed zapisaniem wyrażenia algebraicznego muszą uspójnić jednostki. Np. 2 zł i 0,80 zł a nie 80 gr.

poziom C
← P1c

a) $\frac{2a-b^2}{4}$ dla $a = 5$ i $b = -3$

b) $3{,}5x + 5y$ dla $x = -5$ i $y = 2{,}5$

c) $3x - \frac{1}{2}y$ dla $x = 6$ i $y = -4$

d) $\frac{4}{t+3s}$ dla $t = -3{,}5$ i $s = -1\frac{1}{6}$

e) $3mn + m^2n$ dla $m = 2$ i $n = -6$

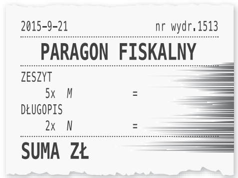
f) $2r(p+1)^2$ dla $p = -4$ i $r = -\frac{2}{3}$

g) $\frac{2}{7}(c-2d)^2$ dla $c = 1{,}5$ i $d = -6\frac{1}{4}$

h) $0{,}2d^2(c-d)$ dla $c = 0$ i $d = -5$

2. Wyraź odpowiedź na pytanie za pomocą wyrażenia algebraicznego.

a) Kilogram bananów kosztuje k złotych. Ile to groszy?
b) Dorota ma p centymetrów wzrostu. Ile to metrów?
c) Jabłka kosztują j zł za kilogram, a droższe od nich pomarańcze p zł za kilogram. O ile droższe są pomarańcze od jabłek?
d) Zeszyt kosztuje M złotych, a długopis N złotych. Ile zapłacimy za pięć zeszytów i dwa długopisy?



3. W sklepiku szkolnym herbata kosztuje x złotych, a drożdżówka jest o 80 groszy od niej tańsza.

a) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile złotych kosztuje drożdżówka.
b) Oblicz wartość wyrażenia z podpunktu a) dla $x = 2$, czyli wyznacz cenę drożdżówki, jeśli herbata kosztuje 2 zł.
c) Zapisz za pomocą wyrażenia algebraicznego, ile zapłacimy za herbatę i dwie drożdżówki.

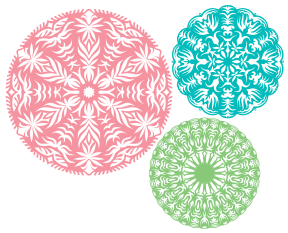
4. Poniżej przedstawiono cennik biletów jednego z gdańskich kin.

Rodzaj biletu	Opis	Cena
normalny	dla osób bez uprawnienia do zniżek	21,50 zł
ulgowy	dla seniorów powyżej 60. roku życia oraz dla dzieci poniżej 12 lat	17,50 zł
student/uczeń	dla studentów/uczniów, za okazaniem ważnej legitymacji	17,00 zł

a) Oblicz, ile zapłacimy za dwa bilety normalne, jeden ulgowy i dwa studenckie.
b) Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile zapłacimy za x biletów normalnych, y ulgowych i z uczniowskich.
c) O ile złotych więcej zapłacimy za n biletów normalnych niż za 2 ulgowe dla $n > 1$?

5. Na kiermaszu wyrobów ludowych można kupić wiklinowe kosze po k zł za sztukę oraz kolorowe wycinanki – małe po m zł, a duże po d zł. Janek kupił 2 kosze i 3 małe wycinanki, a Gosia kupiła 7 małych wycinanek i jedną dużą.

a) Ile zapłaci Janek, a ile Gosia?
b) Janek zapłacił więcej. O ile więcej?

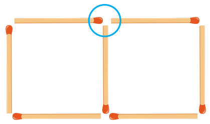


Odpowiedzi

Zadania poziom C a) $\frac{1}{4}$ b) -5 c) 20 d) $-\frac{4}{7}$ e) -60 f) -12 g) 56 h) 25
2. a) $100k$ **b)** $0{,}01p$ **c)** $p-j$ **d)** $5M+2N$ **3. a)** $x-0{,}8$ **b)** 1,20 zł **c)** $x+2(x-0{,}8)$
4. a) 94,50 zł **b)** $21{,}5x+17{,}5y+17z$ **c)** $21{,}5n-35$
5. a) Janek $(2k+3m)$ [zł], Gosia $(7m+d)$ [zł] **b)** o $(2k-4m-d)$ [zł]

6. Czy podane wyrażenia są równe? Jeśli nie są – podaj przykład wartości zmiennej, dla której wartości wyrażeń się różnią.
a) $2\cdot x$ i $x+x$ b) $2\cdot(x+1)$ i $2\cdot x+1$ c) $5-x$ i $x-5$

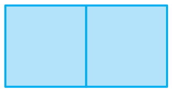
7. Spójrz na rysunek obok. Zapisz wyrażenie pozwalające obliczyć dla n kwadratów, w ilu punktach stykają się trzy zapałki. Oblicz wartość tego wyrażenia dla $n = 4$, a następnie wykonaj odpowiedni rysunek i sprawdź swoją odpowiedź.



8. Kuba powiedział, że wyrażenia $3\cdot(x+1)$ i $x\cdot(x^2+2)+3$ są równe, ponieważ obliczył wartości każdego z nich najpierw dla $x = 1$, potem dla $x = 0$, a na koniec dla $x = -1$ i za każdym razem otrzymał taki sam wynik.
a) Sprawdź, czy obliczenia Kuby są poprawne.
b) Czy Kuba miał rację, twierdząc, że wyrażenia są równe?

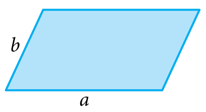
9. Niech n będzie pewną liczbą naturalną dodatnią. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:
a) następną liczbę naturalną, b) poprzednią liczbę naturalną.

10. Dwa kwadraty o boku a zestawiono w jeden prostokąt jak na rysunku. Zapisz wyrażenia pozwalające obliczyć jego pole i obwód.



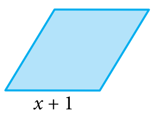
11. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego obwód narysowanej figury.

a)



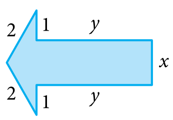
równoległobok

b)



romb

c)



12. Staś ma s lat, jego mama jest od niego 4 razy starsza, a tata jest o 3 lata starszy od mamy. Zapisz wyrażenie algebraiczne pozwalające obliczyć, ile lat mają w sumie.

13. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące:
a) obwód trójkąta, którego długości boków są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi, a pierwsza z nich jest równa n,
b) pole prostokąta, którego długości boków są dwiema kolejnymi liczbami parzystymi, a pierwsza z nich jest równa $2n$,
c) pole rombu, którego długości przekątnych są dwiema kolejnymi liczbami nieparzystymi, a pierwsza z nich jest równa $2n+1$.

Odpowiedzi

Zadania 6. **a)** tak **b)** nie, np. dla $x = 1$ **c)** nie, np. dla $x = 0$ **7.** $2n - 2$, 6 **8. a)** poprawne **b)** nie **9. a)** $n + 1$ **b)** $n - 1$ **10.** $P = 2a^2$, $L = 6a$ **11. a)** $2(a+b)$ **b)** $4(x+1)$ **c)** $x + 2y + 6$ **12.** $9s + 3$ **13. a)** $n + n + 1 + n + 2$ **b)** $2n(2n+2)$ **c)** $\frac{1}{2}(2n+1)(2n+3)$

Uwaga do zadania 8.

Zadanie ma na celu sprawdzenie, czy uczeń rozumie, co to znaczy, że wyrażenia algebraiczne są równe. W tym zadaniu liczby, dla których Kuba sprawdza wartość wyrażenia, zostały dobrane „złośliwie". Jeśli wyciągnęlibyśmy wnioski na podstawie informacji, jakie mamy po sprawdzeniu wartości tylko dla tych trzech liczb, to powiedzielibyśmy, że wyrażenia są równe. Okazuje się, że wystarczy podstawić jakąkolwiek inną liczbę, a otrzymamy różne wartości. Zatem te wyrażenia nie są równe.

1. Stawiamy pionek na polu oznaczonym X. Rzucamy kostką do gry. Na sąsiednim polu w miejsce litery a podstawiamy liczbę oczek, którą wyrzuciliśmy. Przesuwamy pionek na to pole. Następnie kolejny gracz rzuca kostką i podstawia liczbę oczek w miejsce litery b itd. Gra kończy się wtedy, gdy pionek ponownie stanie na polu X.

X	$2a-4$	$b+1$	$2c-c$	$(d-1)\cdot 1$	e
$-m$					$(f-2)(f-3)$
$-2l+12$	$-k+2$	$3-(1-j)$	$8-2i$	$4-h$	$g+3$

2. Modyfikacja gry (a)
Rzucamy jednocześnie kostką i monetą. Jeżeli wypadnie orzeł, w miejsce litery podstawiamy liczbę oczek wyrzuconych na kostce, jeżeli reszka – podstawiamy liczbę przeciwną do liczby wyrzuconych oczek. Pozostałe zasady się nie zmieniają.

3. Modyfikacja gry (b)
Uczniowie tworzą własne plansze na tej samej zasadzie.

Rozwiązania

13. a) $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3$ **b)** $2n(2n+2)$
c) $\frac{1}{2}(2n+1)(2n+3)$

Jeśli uczniowie byli zainteresowani powstawaniem patchworku ze startera, zaproponujmy im opracowanie innego przykładu prowadzącego do odkrycia zależności, którą można by zapisać ogólnie w postaci wyrażenia algebraicznego.

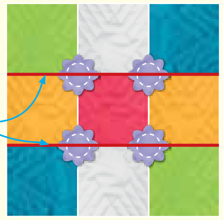
Zadanie „Dla docieklliwych" jest kontynuacją pomysłu na patchwork. Tym razem badamy długość szwów. Dzięki kolejnym pytaniom krok po kroku możemy obliczyć łączną długość szwów.

Dla docieklliwych

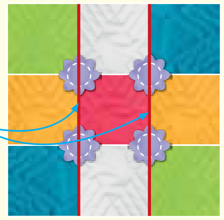
Na s. 172 rozważaliśmy, ile kwiatków przyszywamy do patchworku. Teraz zajmiemy się długością szwów. Zakładamy, że patchwork szyjemy z kwadratów o boku 1 dm.

Aby obliczyć łączną długość wszystkich linii szwów, możemy popatrzeć osobno na szwy wzdłuż linii pionowych i wzdłuż linii poziomych.

Dwie poziome linie szwów.



Dwie pionowe linie szwów.



1. Ile jest poziomych, a ile pionowych linii szwów na patchworku 4×4? A ile na patchworku o wymiarach $n \times n$?

2. Jaką długość ma jedna linia szwu na patchworku 3×3? A 4×4? A ile na patchworku o wymiarach $n \times n$?

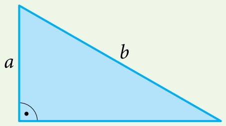
3. Jaka jest łączna długość linii szwów na patchworku o wymiarach $n \times n$? Wykonaj obliczenia dla $n = 30$.

Czy już umiem?

I. Kuba ma x lat, jego siostra Zosia jest od niego dwa razy starsza, a ich brat Artur jest o osiem lat młodszy od Zosi. Zapisz wyrażenie algebraiczne pozwalające obliczyć, ile lat mają w sumie.

II. Oblicz wartość wyrażenia $(3 - x)(1 + 2y)$ dla $x = -2$, $y = 3$.

III. Zapisz w postaci wyrażeń algebraicznych obwód i pole trójkąta przedstawionego na rysunku.



IV. Korzystając z danych z poprzedniego zadania, zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, o ile suma długości przyprostokątnych jest większa od długości przeciwprostokątnej.

Odpowiedzi

Dla docieklliwych **1.** 4×4: 3 poziome i 3 pionowe; $n \times n$: $(n-1)$ poziomych i $(n-1)$ pionowych **2.** 3×3: 3 dm, 4×4: 4 dm, $n \times n$: n dm **3.** $20n(n-1)$; dla $n = 30$: 1700 dm

Czy już umiem? **I.** $5x - 8$ **II.** 35 **III.** $L = 2a + b + 1$, $P = \frac{a^2+a}{2}$ **IV.** o $2a - b + 1$

Rozwiązania

Dla docieklliwych

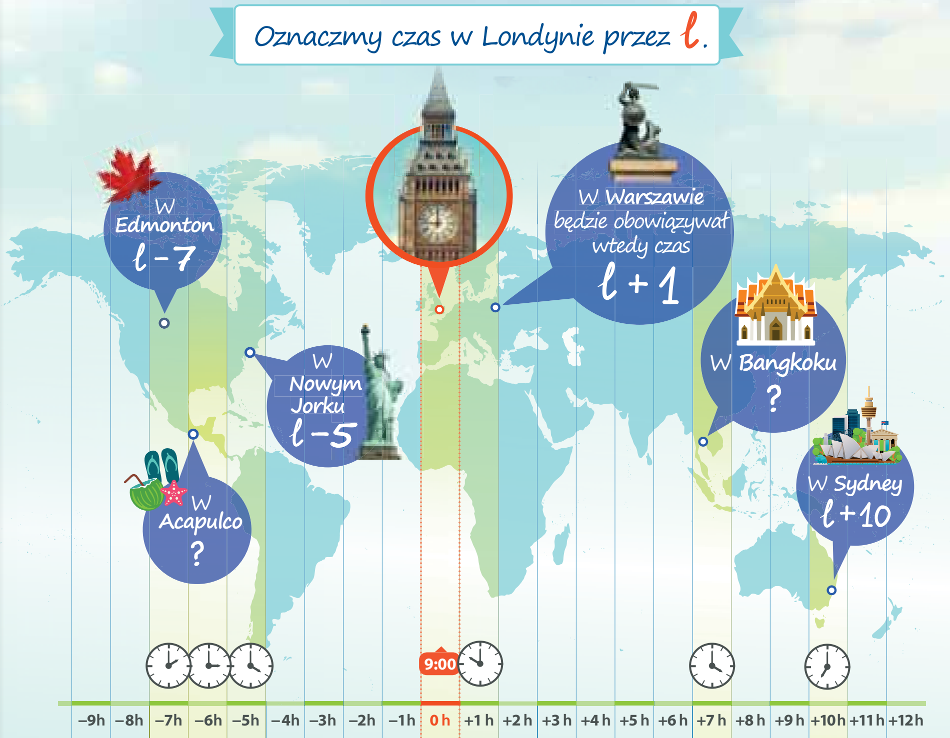
1. Patchwork 4×4: 3 poziome i 3 pionowe linie. Patchwork $n \times n$: $(n - 1)$ poziomych i $(n - 1)$ pionowych linii.
2. Patchwork 3×3: linia ma 30 cm, patchwork 4×4: linia ma 40 cm, patchwork $n \times n$: linia ma długość $10n$ cm.
3. Łączna długość linii: $20n(n - 1)$ cm. Dla $n = 30$ mamy $20n(n - 1) = 20 \cdot 30 \cdot (30 - 1) = 17\,400$ [cm]

dlanauczyciela.pl | Kartkówka IV.1

2 Nazywanie wyrażeń algebraicznych

Na dobry początek ›

Ziemia jest podzielona wzdłuż południków na 24 strefy czasowe. Różnica czasu między dwiema sąsiednimi strefami wynosi jedną godzinę. W strefie czasowej zawierającej południk 0 (np. w Londynie) obowiązuje tzw. czas uniwersalny. W strefach na wschód od południka 0 dodajemy odpowiednią liczbę godzin do czasu uniwersalnego, w strefach leżących na zachód od tego południka – odejmujemy odpowiednią liczbę godzin.



Pytania i polecenia

- Zapisz czas obowiązujący w Bangkoku i w Acapulco w zależności od *l*.
- Spośród podanych miast wymień te, dla których wyrażenie określające obowiązujący czas w zależności od *l* zapisujemy w postaci sumy, oraz te, dla których wyrażenie takie zapisujemy w postaci różnicy.

Odpowiedzi

- Bangkok: *l* +7, Acapulco: *l* – 6.
- Warszawa: *l* + 1, Bangkok: *l* + 7, Sydney: *l* + 10 (suma).
- Edmonton: *l* – 7, Acapulco: *l* – 6, Nowy York: *l* – 5 (różnica).

Uwagi metodyczne

Na realizację tematu przewidziano 2 godziny lekcyjne.

W starterze jest mowa o różnych strefach czasowych, dzięki którym możemy wprowadzić zapisywanie informacji za pomocą prostych wyrażeń algebraicznych: sumy i różnicy. Być może temat ten wywoła dyskusję, bo niektórzy uczniowie, np. w czasie wakacji, zmieniali strefy czasowe i będą chcieli opowiedzieć, jak to było. Jeżeli dyskusja odbiegnie nieco od tematu, mimo wszystko warto poświęcić na nią kilka minut – uczniowie zyskają kolejną okazję przekonania się, jak ściśle matematyka wiąże się z otaczającym światem. Wpłynie to także na motywację do pracy z tym tematem.

Złote myśli

Wyobraźnia jest ważniejsza od wiedzy.

A. Einstein

UMIEJĘTNOŚCI

Uczeń już potrafi:

- zapisywać wyniki podanych działań w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych
- rozpoznawać równe wyrażenia algebraiczne
- obliczać wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych
- zapisywać zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych

Uczeń będzie umiał:

- zapisywać symbolicznie wyrażenia algebraiczne opisane słownie
- nazywać wyrażenia algebraiczne
- opisywać słownie wyrażenia algebraiczne zapisane symbolicznie

Rozdział	IV (18 godzin)							V (16 godzin)						VI (13 godzin)					VII (11 godzin)				
Temat	1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	P	1	2	3	4	P	1	2	3	4	P
Godziny lekcyjne (razem 125)																							
Miesiące			II				III					IV				V						VI	
Semestr																							

Każdy członek czteroosobowej grupy wymyśla pięć wyrażeń algebraicznych i zapisuje je tak, aby pozostali uczniowie ich nie widzieli.
Następnie uczniowie po kolei podają zapisy słowne swoich wyrażeń. Pozostali starają się je zapisać symbolicznie i wspólnie sprawdzają, czy zrobili to poprawnie.
Jeżeli uczniom sprawi trudność stosowanie sposobu opisywania wyrażeń podanego w podręczniku, można rozpocząć od trochę innego. Oto przykład.
Wyrażenie $(x+y)^2 - 4x$ można opisać następująco: dodaj x do y, otrzymany wynik (lub sumę) podnieś do kwadratu, a od wyniku odejmij liczbę x pomnożoną przez 4.
Aby uczniów zachęcić do takiej zabawy, można wprowadzić punktację: +1 pkt za każde prawidłowo zapisane wyrażenie, –1 pkt za niepoprawny opis wyrażenia.

Czy wiesz, że...
Słowo *algebra* pochodzi z IX w. od tytułu arabskiego podręcznika do matematyki. Arabskie *al-dżabr* oznacza przywracanie lub ponowne łączenie. Dziś algebrą nazywamy obszar matematyki, w którym liczby i działania zapisujemy za pomocą symboli.

Suma, różnica, iloczyn i iloraz zmiennych

Przykład 1

Zapisz sumę liczb:
a) 2 i 3, b) 1526 i 16 725, c) x i y.

Przypomnijmy, co pisaliśmy na temat sumy liczb w klasie czwartej.

$$\underbrace{\overset{\text{składnik}}{7} + \overset{\text{składnik}}{4}}_{\text{suma}} = \underset{\text{suma}}{11}$$

a) Polecenie „zapisz sumę liczb 2 i 3” można wykonać na dwa sposoby: napisać „5” albo „2 + 3”.
b) Poprawną odpowiedzią jest zarówno „18 251”, jak i „1526 + 16 725”.
c) W tym przypadku nie możemy wykonać dodawania, ponieważ nie znamy wartości zmiennych x i y. Pozostaje nam jeszcze drugi sposób zapisu: $x + y$.

Podobnie możemy postępować w przypadku innych działań, np. iloczyn zmiennych x i y to po prostu $x \cdot y$.

Ćwiczenie 1

Zapisz:
a) iloczyn zmiennych a i b,
b) różnicę zmiennej x i zmiennej y,
c) iloraz zmiennej x przez liczbę 5.

Nazywanie złożonych wyrażeń

Oto wyrażenie, w którym plamy zakryły wszystko, co zapisano w nawiasach:

( ) : ( )

Mimo tych plam wiemy, że nasze wyrażenie jest **ilorazem** dwóch wyrażeń. Nie przestaniemy go nazywać ilorazem nawet wtedy, gdy usuniemy plamy i zobaczymy tam inne działania.
Możemy natomiast powiedzieć dokładniej, że jest to **iloraz sumy przez różnicę**.

$$\underbrace{\underbrace{(5a+1)}_{\text{suma}} : \underbrace{(3-b)}_{\text{różnica}}}_{\text{iloraz sumy przez różnicę}}$$

Odpowiedzi

Ćwiczenia 1. a) $a \cdot b$ b) $x - y$ c) $x : 5$ lub $\frac{x}{5}$

Zauważ, że gdy obliczamy wartość tego wyrażenia dla konkretnych liczb a i b, dzielenie jest **ostatnim** wykonywanym działaniem.

Przykład 2

Nazwij wyrażenie algebraiczne.

a) $2x+7y$ b) $p-\frac{q}{3}$ c) $2\cdot(a+b)$ d) $\frac{m+n}{7}$

a) $2x+7y$ to suma dwóch iloczynów: liczb 2 i x oraz liczb 7 i y.

b) $p-\frac{q}{3}$ to różnica liczby p i trzeciej części liczby q.

c) $2\cdot(a+b)$ to iloczyn liczby 2 oraz sumy liczb a i b.

d) $\frac{m+n}{7}$ to iloraz sumy liczb m i n przez liczbę 7.

Zapamiętaj

Wyrażenie algebraiczne bierze nazwę od ostatniego działania wykonywanego przy obliczaniu jego wartości zgodnie z zasadą kolejności wykonywania działań.

kolejność wykonywania działań

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{a+2}_{\text{suma}})^2}_{\text{kwadrat}}\cdot b}_{\text{iloczyn}} \leftarrow \text{nazwa wyrażenia algebraicznego}$$

Ćwiczenie 2

Nazwij wyrażenie algebraiczne.

a) $a+2\cdot b$ b) $(a+2)\cdot b$ c) $(a-b):(a+1)$

Zapisywanie wyrażeń algebraicznych

Zapisując wyrażenia algebraiczne na podstawie opisu słownego, trzeba pamiętać o nawiasach. Na przykład **iloczyn** wyrażenia $a+2$ oraz zmiennej b to $(a+2)\cdot b$.

Gdybyśmy zapomnieli o nawiasie, otrzymalibyśmy wyrażenie $a+2\cdot b$, które jest **sumą**, ponieważ zgodnie z kolejnością wykonywania działań ostatnim wykonywanym działaniem byłoby dodawanie.

O tym, że wyrażenia $(a+2)\cdot b$ oraz $a+2\cdot b$ nie są równe, łatwo się przekonać, podstawiając do nich przykładowe liczby, np. $a=1$ i $b=5$:

$(a+2)\cdot b=(1+2)\cdot 5=3\cdot 5=15$, ale $a+2\cdot b=1+2\cdot 5=1+10=11$.

Odpowiedzi

Ćwiczenia 2. **a)** suma liczby a i iloczynu liczb 2 i b **b)** iloczyn sumy liczb a i 2 oraz liczby b **c)** iloraz różnicy liczb a i b przez sumę liczb a i 1

Warto pokazać, że to samo wyrażenie można opisać słownie na różne sposoby.
Przy okazji tych ćwiczeń uczniowie powtórzą zasady kolejności wykonywania działań i używania nawiasów.

Dodatek do ćwiczenia 2.

Nazwij wyrażenie algebraiczne.

a) $x : 3-y$ **c)** $(a+3)(b+5)$

b) $x : (3-y)$ **d)** $ab+5bc$

Odpowiedzi

a) Różnica trzeciej części liczby x i liczby y.

b) Iloraz liczby x przez różnicę liczb 3 i y.

c) Iloczyn sum liczb a i 3 oraz liczb b i 5.

d) Suma iloczynów liczb a i b oraz liczb 5, b i c.

Lekcję poświęcamy formalnym zasadom zapisu i nazewnictwu wyrażeń algebraicznych. To bywa trudne dla sporej części uczniów, dlatego bardzo cenne są przykład 3. i ćwiczenie 3. Takich przykładów należy rozwiązywać jak najwięcej; to one właśnie mogą uczniom przybliżyć podstawy nowego języka. Można wykorzystać zadania na s. 184–185, ale warto polecić uczniom przygotowanie (w grupach) serii podobnych ćwiczeń. Uczniowie zdolniejsi mogą się skupić na ćwiczeniach podobnych do zadań 6.–7. i wymyślać rozmaite skomplikowane wyrażenia algebraiczne. Takie polecenia mogą stanowić część pracy domowej.

Propozycja pracy krótkoterminowej

Warto wykorzystać poniższe informacje z „Czy wiesz, że …” jako podstawę dla chętnych uczniów do stworzenia zwięzłego opracowania na temat słowa „algebra”.

Czy wiesz, że...

Podstawowym systemem liczbowym stosowanym niemal we wszystkich krajach jest pozycyjny system dziesiętny, który opiera się na grupowaniu jednostek po dziesięć. Istotne znaczenie ma pozycja cyfry w zapisie danej liczby. W liczbie 45 cyfra 4 oznacza liczbę dziesiątek, a w liczbie 450 cyfra 4 oznacza liczbę setek.

...	Dziesiątki tysięcy	Tysiące	Setki	Dziesiątki	Jedności	Zapis liczby
...	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	
				4	5	$10 \cdot 4 + 1 \cdot 5$
				x	y	$10 \cdot x + 1 \cdot y$
			4	5	0	$100 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 1 \cdot 0$
			x	y	z	$100 \cdot x + 10 \cdot y + 1 \cdot z$

Każdą liczbę dwucyfrową, której cyfrą dziesiątek jest x, a cyfrą jedności jest y, zapisujemy w postaci: $10x + y$. Każdą liczbę trzycyfrową, której cyfrą setek jest x, cyfrą dziesiątek jest y, a cyfrą jedności jest z, zapisujemy w postaci: $100x + 10y + z$.

Przykład 3

Zapisz wyrażenie algebraiczne.

	Zapis słowny	Zapis symboliczny
a)	Suma potrojonej liczby a i liczby b.	$3a + b$
b)	Iloczyn liczby 3 oraz sumy liczb a i b.	$3(a + b)$
c)	Iloczyn sumy liczb a i b oraz różnicy liczb a i b.	$(a + b)(a - b)$
d)	Iloraz różnicy liczb p i q przez liczbę 4.	$(p - q) : 4$

Ćwiczenie 3

Zapisz wyrażenie algebraiczne.

a) Suma liczby 5 oraz iloczynu liczb 3 i n.
b) Iloczyn liczby 5 oraz sumy liczb n i 3.
c) Suma liczby 10 i liczby cztery razy większej od liczby n.
d) Różnica liczby 4 i liczby trzy razy mniejszej od liczby n.

Z. ĆWICZEŃ 1–3 4–6

Zadania

ZB. ZADAŃ 1–9 10–17 18–24

1. Wyrażenie $\frac{ah}{2}$, za pomocą którego obliczamy pole trójkąta o podstawie a i wysokości h opuszczonej na ten bok, można opisać słownie np. jako połowę iloczynu długości podstawy i odpowiedniej wysokości. Opisz słownie wyrażenie pozwalające obliczyć:

a) obwód prostokąta o bokach a, b, czyli $2a + 2b$,
b) pole rombu o przekątnych d_1, d_1, czyli $\frac{1}{2}d_1d_2$.

2. Podaj zapis symboliczny wyrażenia algebraicznego opisanego słownie.

a) Różnica kwadratów liczb x i y.
b) Kwadrat różnicy liczb x i y.
c) Suma sześcianów liczb x i y.
d) Sześcian sumy liczb x i y.

„Kwadrat sumy” to nie to samo co „suma kwadratów”!
$(a + b)^2$ – kwadrat sumy
$a^2 + b^2$ – suma kwadratów

3. Uzasadnij, że wyrażenia „kwadrat różnicy liczb x i y” i „różnica kwadratów liczb x i y” nie są równe.

Wskazówka. Skorzystaj z wyrażeń zapisanych w poprzednim zadaniu. Wybierz takie x i y, dla których podane wyrażenia mają różne wartości.

4. Zapisz wyrażenie algebraiczne i oblicz jego wartość dla $x = -3$.

a) Iloczyn liczby 3 i czwartej potęgi liczby x.
b) Czwarta potęga iloczynu liczb 3 i x.
c) Iloczyn liczby 5 oraz trzeciej potęgi liczby x.
d) Trzecia potęga iloczynu liczb 5 i x.

Odpowiedzi

Ćwiczenia 3. a) $5 + 3n$ b) $5(n + 3)$ c) $10 + 4n$ d) $4 - \frac{n}{3}$
Zadania 1. a) suma podwojonych długości boków b) połowa iloczynu długości przekątnych 2. a) $x^2 - y^2$ b) $(x - y)^2$ c) $x^3 + y^3$ d) $(x + y)^3$ 4. a) $3x^4$, 243 b) $(3x)^4$, 6561 c) $5x^3$, -135 d) $(5x)^3$, -3375

5. Zapisz wyrażenie algebraiczne i oblicz jego wartość dla $x = -1$ i $y = 3$.

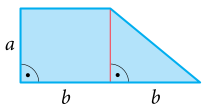
a) Iloczyn kwadratu liczby x i trzeciej potęgi liczby y.
b) Trzecia potęga sumy kwadratów liczb x i y.

6. Nazwij każde z poniższych wyrażeń algebraicznych. Podaj przykłady takich liczb x i y, dla których wyrażenia te mają różne wartości. Czy istnieją takie wartości liczbowe zmiennych x i y, dla których wartości podanych wyrażeń są równe? Jeśli tak, podaj przykłady. Czy dane wyrażenia są równe?

a) x^2+y^2, $(x+y)^2$ b) $3x^2y^2$, $(3xy)^2$

7. Na rysunku przedstawiono trapez prostokątny. Opisz jego pole za pomocą wyrażenia będącego:

a) sumą, c) iloczynem,
b) różnicą, d) ilorazem.



Dla dociekliwych

1. Zanim upowszechnił się zapis algebraiczny, wyrażenia opisywano słownie. Oto przykłady takiego opisu równości wyrażeń.

a) Iloczyn sumy dwóch liczb przez ich różnicę jest równy różnicy kwadratów tych liczb.
b) Kwadrat różnicy dwóch liczb jest równy sumie ich kwadratów pomniejszonej o podwojony iloczyn tych liczb.
c) Sześcian sumy dwóch liczb jest równy sumie sześcianu pierwszej liczby, sześcianu drugiej liczby, trzykrotności iloczynu kwadratu pierwszej liczby przez drugą oraz trzykrotności iloczynu pierwszej liczby przez kwadrat drugiej.

Zapisz te równości wyrażeń za pomocą symboli. Następnie sprawdź je na kilku przykładach. W ósmej klasie dowiesz się, jak uzasadnić, że tego typu równości są prawdziwe dla wszystkich liczb.

Czy już umiem?

I. Nazwij wyrażenie.

a) $2(a+b)$ b) $\frac{a+1}{x-y}$ c) $2(x+1)^2$

II. Zapisz symbolicznie wyrażenie opisane słownie.

a) Sześcian sumy liczby a i połowy liczby b.
b) Różnica liczby a i iloczynu liczb b i 5.

III. Zapisz symbolicznie dwa wyrażenia:

• połowa kwadratu liczby x, • kwadrat połowy liczby x.

Podaj przykładową liczbę x, dla której te wyrażenia mają:
a) jednakową wartość, b) różne wartości.
Czy te wyrażenia są równe?

dlanauczyciela.pl | Kartkówka IV.2

Odpowiedzi

Zadania 5. a) x^2y^3, 27 b) $\left(x^2+y^2\right)^3$, 1000 6. a) x^2+y^2 – suma kwadratów liczb x i y, $(x+y)^2$ – kwadrat sumy liczb x i y, wyrażenia te mają taką samą wartość, jeżeli przynajmniej jedna z liczb x lub y jest równa 0. b) $3x^2y^2$ – iloczyn liczby 3, kwadratu liczby x i kwadratu liczby y, $(3xy)^2$ – kwadrat iloczynu liczby 3, liczby x i liczby y, wyrażenia te mają taką samą wartość, jeżeli przynajmniej jedna z liczb x lub y jest równa 0. 7. a) $ab+\frac{ab}{2}$ b) $2ab-\frac{ab}{2}$ c) $1{,}5ab$ d) $\frac{3ab}{2}$

Dla dociekliwych 1. a) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ b) $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ c) $(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

Czy już umiem? I. a) podwojona suma liczb a i b b) iloraz sumy liczb a i 1 przez różnicę liczb x i y c) podwojony kwadrat sumy liczb x i 1 II. a) $\left(a+\frac{b}{2}\right)^3$ b) $a-5b$ III. $\frac{x^2}{2}$, $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ a) np.: $x=0$ b) np.: $x=1$

Uwagi metodyczne

Na realizację tematu przewidziano 2 godziny lekcyjne.

Pojęcie jednomianu ułatwia opis czynności na wyrażeniach algebraicznych i porządkuje zapisy. Pokazują to zamieszczone w podręczniku przykłady i ćwiczenia. Łamigłówka w starterze wprowadza uczniów w porządkowanie jednomianów.

POMOCNE BĘDĄ:

1. woreczki zawierające karteczki z jednomianami podobnymi.

UMIEJĘTNOŚCI

Uczeń już potrafi:

- zapisywać symbolicznie wyrażenia algebraiczne opisane słownie
- nazywać wyrażenia algebraiczne
- opisywać słownie wyrażenia algebraiczne zapisane symbolicznie
- obliczać wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych

Uczeń będzie umiał:

- rozpoznawać jednomiany
- porządkować jednomiany
- mnożyć jednomiany

3 Jednomiany

Na dobry początek

Przyjrzyj się przedmiotom pokazanym na zdjęciu, a następnie spróbuj rozwiązać poniższą łamigłówkę.

Pytania i polecenia

- Litery w nazwach czterech przedmiotów znajdujących się na zdjęciu uporządkowano w szczególny sposób. Najpierw ułożono alfabetycznie litery występujące w nazwie, a następnie liczbę występowania danej litery zapisano w postaci potęgi. W ten sposób z wyrazu OAZA otrzymalibyśmy A^2OZ. Spróbuj odszyfrować jak najwięcej z ukrytych nazw.
  Dla ułatwienia podajemy pierwsze litery wyrazów: W, P, C, S.

Odpowiedzi

- WINOGRONO, CYTRYNA, PATERA, SZKATUŁA

Rozdział	I (18 godzin)							II (13 godzin)							III (28 godzin)											
Temat	1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	P
Godziny lekcyjne (razem 125)																										
Miesiące	IX					X						XI					XII					I				
Semestr	I – 59 godzin																									

Poniżej zapisaliśmy kilka wyrażeń algebraicznych zielonym kolorem i kilka – czerwonym. W wyrażeniach zapisanych na zielono występuje tylko mnożenie liczb i zmiennych. Takie wyrażenia nazywamy **jednomianami**. W wyrażeniach zapisanych na czerwono występują także inne działania.

TO SĄ JEDNOMIANY		
5	$2x$	$\sqrt{7}\cdot x$
x^2	$-6x$	$2x^2\cdot 3a$

TO NIE SĄ JEDNOMIANY	
$2+x$	$2x-3y$
$\frac{6}{x}$	$7\sqrt{x}$

Zapamiętaj

Jednomian to wyrażenie, które jest iloczynem liczb i zmiennych.

Przykład 1

Czy podane wyrażenie jest jednomianem?

a) $5xy$ c) $\frac{8}{x}$ e) $x+6$ g) $2xy-1$
b) $\frac{x}{8}$ d) $2x^2$ f) $2x(y-1)$ h) $(2+3)x$

a) $5xy = 5\cdot x\cdot y$ jest iloczynem liczby i zmiennych, czyli jest jednomianem.

b) $\frac{x}{8} = \frac{1}{8}\cdot x$ jest jednomianem.

c) $\frac{8}{x}$ jest ilorazem liczby przez zmienną, czyli nie jest jednomianem.

d) $2x^2 = 2\cdot x\cdot x$ jest jednomianem.

e) $x+6$ jest sumą liczby i zmiennej, czyli nie jest jednomianem.

f) $2x(y-1) = 2\cdot x\cdot(y-1)$ jest iloczynem, ale nie jest jednomianem, bo czynnik $(y-1)$ nie jest ani liczbą, ani zmienną.

g) $2xy-1$ jest różnicą, czyli nie jest jednomianem.

h) $(2+3)x = 5x$ jest jednomianem.

Ćwiczenie 1

Wśród podanych wyrażeń algebraicznych wskaż jednomiany.

$5ab,\quad \frac{1}{5}a+b^2,\quad 5a-b,\quad \frac{5}{ab},\quad \frac{1}{5}ab^2,\quad 5+a-b$

Odpowiedzi

Ćwiczenia 1. $5ab$, $\frac{1}{5}ab^2$

Zauważmy, że praca nawet z tak łatwym tematem jak jednomiany może powodować niezrozumienie i być przyczyną kłopotów.

Wśród przykładów jednomianów pojawiają się: $5xy$, $2x^2$, $-6x$. Co oznacza jednomian $5xy$ dla $x=4$, $y=3$? Może 543? A może $5\cdot 43$ lub $5\cdot 4\cdot 3$? Z takimi kłopotami spotykają się nauczyciele w klasach starszych. Ważne jest zatem systematyczne przypominanie zasad obowiązujących w języku matematyki, szczególnie na pierwszych lekcjach wprowadzających w temat.

Przykład 1. i ćwiczenie 1. warto rozszerzyć. Poprośmy uczniów o podanie przykładów wyrażeń, które nie są jednomianami.

Dodatek do ćwiczenia 1.

Wśród podanych wyrażeń algebraicznych wskaż jednomiany.

$3xy,\ 3+xy,\ 3x-y,\ x^3y,\ \frac{x}{3y},\ 3-x-y$

Odpowiedź

Jednomianami są wyrażenia: $3xy$, x^3y.

IV (18 godzin)							V (16 godzin)						VI (13 godzin)					VII (11 godzin)					Łączna liczba godzin do dyspozycji nauczyciela
1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	P	1	2	3	4	P	1	2	3	4	P	

II	III	IV	V	VI

II – 63 godziny

Na tej stronie i na stronie następnej znajdziemy dwa uzupełniające się zagadnienia dotyczące zapisu jednomianów. Porządkowanie jednomianów nieodłącznie wiąże się z ich mnożeniem. Niektórzy uczniowie będą zaskoczeni, że nauczyciel wymaga przekształcania zapisu $ab7c$ do postaci $7abc$. Sądzą, że skoro oba zapisy oznaczają to samo, to nie ma potrzeby zmian. Wyjaśnijmy im, że to rodzaj umowy. Postanowiono o porządkowaniu jednomianów według określonych zasad, aby były one bardziej czytelne. Uporządkowanie jednomianów umożliwia szybkie rozpoznawanie jednomianów podobnych, co przydaje się przy redukcji wyrazów podobnych sumy algebraicznej.

Klasę dzielimy na trzy- lub czteroosobowe grupy. Każda z nich losuje po kolei trzy lub cztery jednomiany (w zależności od tego, ile osób liczy grupa). Następnie przedstawiciel dyktuje te jednomiany pozostałym grupom. Każda grupa pracuje niezależnie i zapisuje uporządkowany iloczyn jednomianów. Punkty zdobywają trzy grupy, które zgłoszą się jako pierwsze – odpowiednio 3, 2 lub 1 punkt. Grupa, która poda wynik nieuporządkowany lub błędny, nie otrzymuje punktów. Przeprowadzamy tyle rund, ile jest grup. Wygrywa ta grupa, która zdobędzie najwięcej punktów.
Można wymyślić różne wersje takiej zabawy. Wprowadzenie gry na czas bardzo uaktywnia uczniów.

Porządkowanie jednomianów

Jednomian **uporządkowany** to taki, który spełnia następujące warunki:
- jeśli w jednomianie jest liczba, to znajduje się ona na początku,
- zmienne są zapisane w kolejności alfabetycznej,
- jeśli zmienna pojawia się kilkakrotnie, to jest zapisana w postaci potęgi.

Jeśli chociaż jeden z tych warunków nie jest spełniony, to jednomian nie jest uporządkowany.

TE JEDNOMIANY SĄ UPORZĄDKOWANE	TE JEDNOMIANY NIE SĄ UPORZĄDKOWANE
$-3x^2y$ $6ac^7$	$-3xyx$ $2c^3a\cdot 3c^4$
$-5t^2xz^5$ mv^2	$-zzttxz^3\cdot 5$

Przykład 2

Uporządkuj jednomian.

a) $3xxyyy = 3x^2y^2$ — Zapisujemy iloczyny jednakowych czynników jako potęgi.

b) $-5x^2y^3x^5y = -5x^7y^4$ — Bo $x^2x^5 = x^7$, a $y^3y = y^4$.

c) $-2x^2\cdot 3xy^3 = -6x^3y^3$ — Najpierw mnożymy liczby, potem porządkujemy zmienne.

d) $3y\cdot 2y^2\cdot(-5)x^2 = 30x^2y^3$ — Najpierw mnożymy liczby, potem porządkujemy zmienne x, y i zapisujemy je w kolejności alfabetycznej.

Ćwiczenie 2

Uporządkuj jednomian.

a) $-5a\cdot 7a$ b) $c^2b^2a^2\cdot\frac{1}{2}$ c) $11y^3x^2y^2\cdot\frac{1}{22}$

Liczbę występującą w uporządkowanym jednomianie nazywamy **współczynnikiem liczbowym jednomianu**.

Przykład 3

Podaj współczynnik liczbowy jednomianu.

a) $-5x$ — Współczynnik: -5.

b) $0{,}2ab^2$ — Współczynnik: $0{,}2$.

c) $7x\cdot(-3)$ — Jednomian nie jest uporządkowany – musimy pomnożyć występujące w nim liczby, współczynnik: -21.

d) x — Współczynnika nie widać, ale zmienną x możemy zapisać jako $1\cdot x$, zatem współczynnik wynosi 1.

e) $-xy$ — $-xy = (-1)\cdot xy$, współczynnik: -1.

Odpowiedzi

Ćwiczenia 2. a) $-35a^2$ b) $\frac{1}{2}a^2b^2c^2$ c) $\frac{1}{2}x^2y^5$

Ćwiczenie 3

Podaj współczynnik liczbowy jednomianu.

a) $-8x$ b) $0{,}01a^2b^3$ c) xyz d) $-\frac{1}{3}xy$ e) $-0{,}3$ f) $-a^2$

Mnożenie jednomianów

Zauważmy, że po pomnożeniu jednomianów też otrzymamy jednomian, na ogół nieuporządkowany.

Przykład 4

Pomnóż jednomiany $2yx^2$ i $-7xy$. Wynik podaj w postaci uporządkowanej.

$(2yx^2)\cdot(-7xy) = 2\cdot \underline{y}\cdot \underline{x^2}\cdot(-7)\cdot \underline{x}\cdot \underline{y} =$ Zmieniamy kolejność czynników.

$= 2\cdot(-7)\cdot x^2\cdot x\cdot y\cdot y =$ Mnożymy liczby, a iloczyny zmiennych x i y zapisujemy jako potęgi.

$= -14\cdot x^3\cdot y^2 = -14x^3y^2$

Ćwiczenie 4

Pomnóż jednomiany. Wynik podaj w postaci uporządkowanej.

a) $(4x)\cdot(5y)$ c) $(-abc)\cdot(a^2bc)$

b) $(8xy)\cdot(3xz)$ d) $(-5x^2y^3)\cdot(-2xy^2)$

Znak minus przed jednomianem

Przykład 5

Oblicz wartość jednomianu $-x$ dla:

a) $x=2$, b) $x=-3$, c) $x=0$.

a) Skoro $x=2$, to $-x=-2$.

b) Skoro $x=-3$, to $-x=-(-3)=3$.

c) Skoro $x=0$, to $-x=-0=0$.

Zapamiętaj

Zapis $-x$ oznacza liczbę przeciwną do x. Nie zawsze jest ona ujemna!

Ćwiczenie 5

Czy dla podanej wartości z wartość wyrażenia $-2z$ jest dodatnia, czy ujemna?

a) $z=1800$ b) $z=-900$ c) $z=0$

Z. ĆWICZEŃ 1–5 6–8

Odpowiedzi

Ćwiczenia 3. a) -8 b) $0{,}01$ c) 1 d) $-\frac{1}{3}$ e) $-0{,}3$ f) -1 4. a) $20xy$ b) $24x^2yz$ c) $-a^3b^2c^2$ d) $10x^3y^5$ 5. a) ujemna b) dodatnia c) ani dodatnia, ani ujemna

Przy okazji mnożenia jednomianów możemy w rozwiązaniu zadania wyodrębnić kolejne kroki. Są uczniowie, dla których taki sposób jest bardziej zrozumiały.

Dodatek do przykładu 4.

Pomnóż jednomiany $2yx^2$ i $-7xy$. Wynik podaj w postaci uporządkowanej.

Krok 1.
Zapisujemy iloczyn jednomianów: $(2yx^2)\cdot(-7xy)$.

Krok 2.
Zauważmy, że pierwszy czynnik nie musi być zapisany w nawiasie, w drugim czynniku w nawiasie pozostawiamy tylko –7:
$2yx^2\cdot(-7)xy$

Krok 3.
Mnożymy czynniki liczbowe, a literowe zapisujemy po kolei:
$2yx^2\cdot(-7)xy = -14yx^2xy$ Korzystamy z prawa przemienności mnożenia.

Krok 4.
Porządkujemy czynniki literowe, mnożąc jednomiany wyrażone tą samą literą:
$-14yx^2xy = -4y^2x^3$ Korzystamy z prawa przemienności mnożenia.

Krok 5.
Porządkujemy wyrażenie, czyli zapisujemy na początku liczby, a następnie litery w kolejności alfabetycznej:
$-14x^3y^2$

Uwaga do „Zapamiętaj”

Zwróćmy uwagę na istotną kwestię, z którą część uczniów ma kłopoty – zapis $(-x)$ nie oznacza liczby ujemnej. Warto przećwiczyć to z uczniami, podstawiając za x zero, liczby dodatnie i ujemne.

Zadanie z kluczem

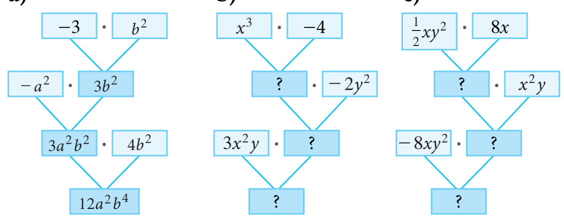
Poziomy:
A – ocena, czy wyrażenie jest jednomianem,
B – podawanie współczynnika liczbowego jednomianu (niekoniecznie uporządkowanego),
C – porządkowanie jednomianu,
D – obliczenie i porządkowanie iloczynu jednomianów.

Zamieszczone niżej zadanie jest doskonałym wzorem do tworzenia podobnych schematów. Samodzielne zbudowanie chociaż jednego takiego grafu jest równoważne z wykonaniem kilkunastu ćwiczeń, a uczniowie bez wątpienia uznają je za ciekawsze niż np. zadanie 1.D, skądinąd bardzo przydatne.

Dodatkowe zadanie

Przeanalizuj graf a), w którym w ciemniejsze pola wpisano uporządkowane jednomiany stanowiące iloczyny podanych wyżej czynników. Następnie przerysuj grafy b) i c) i uzupełnij je o brakujące jednomiany, postępując tak, jak pokazano w grafie a).

a) **b)** **c)**



Zadania

ZB. ZADAŃ 1–9 10–17 18–28

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz cztery kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A ← P1 Odpowiedz, czy podane wyrażenie jest jednomianem.

a) $4abba$ c) x^2+3x e) $2\cdot 3+xy$ g) $\sqrt{3x}$
b) $-3x+2y$ d) $\frac{1}{3}p^9\cdot(-2p)$ f) $8x^{102}$ h) $(xyz)^{12}$

poziom B ← P3 Podaj współczynnik liczbowy jednomianu.

a) $-\frac{13}{7}x^3y^3$ c) $1{,}5x\cdot(-5)\cdot y$ e) $-\frac{3}{2}x^5$ g) $-2x^2y$ i) $\frac{5}{2}x^2y^5\cdot\left(-\frac{8}{125}\right)$
b) $-11xy$ d) a^9 f) $-x^3y^4$ h) $\sqrt{2}\,b^2c$ j) $-0{,}3ab$

poziom C ← P2 Uporządkuj jednomian.

a) $2x^2y^3\sqrt{3}xy^2$ d) $-3sts\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)s^3t$ g) $hhg\cdot 4g^4h^2\cdot 2\sqrt{5}$
b) $xyx^2\cdot(-1{,}5)x\cdot(-7)$ e) $-\frac{3}{4}prr\cdot(-8)p^6$ h) $-\frac{1}{4}p^3r^5\cdot(-2)^2p^2r$
c) $aba^2\cdot(-3)^2b$ f) $a^5\cdot 4b\cdot 2\sqrt{2}\,a\cdot(-3)b$ i) $a\sqrt{5}\cdot x^2\cdot\frac{3}{2}t$

poziom D ← P4 Pomnóż jednomiany i uporządkuj otrzymany iloczyn.

a) $3a^2b^3$, $-1{,}5a^3b^2$ e) $-1\frac{1}{4}ghg$, $-6g^2h^2$
b) $-2s\cdot 3t^2s$, $\frac{4}{9}s^2t$ f) $b^2\cdot 2a^3\cdot\frac{3}{4}$, $a\cdot(-8)b^3$
c) $-\frac{5}{6}xyx^2$, $-3x^2y^3$ g) $p^3p^2r\cdot 4$, $r^4p\cdot 2\sqrt{3}$
d) $x^2yx^2\cdot(-5)$, $yyx\cdot(-0{,}1)$ h) $-\frac{1}{5}d^2c^4$, $-0{,}5d^3c$

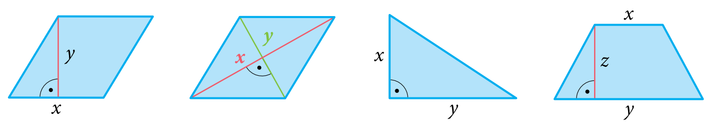
2. Przyjmij, że poniższe wyrazy są jednomianami. Uporządkuj te wyrażenia.

a) *zoo* c) *matematyka*
b) *kawka* d) *internet*

rabarbar $= a^3b^2r^3$

3. Zapisz jednomian a^2krt w postaci nieuporządkowanej, tak aby powstało słowo w języku polskim. Jest sześć takich słów – postaraj się znaleźć jak najwięcej z nich.

4. Zapisz wyrażenia pozwalające obliczyć pola figur. Które z nich są jednomianami?



romb romb trójkąt trapez

5. Pomnóż podany jednomian przez $-8ab^2$.

a) $2a$ b) $0{,}25ac$ c) $\frac{1}{3}a^2b^3$ d) $-4ab^2c$ e) $-1\frac{1}{3}a^3b$

Odpowiedzi

Zadania 1. poziom A a), d), f), h) – tak, b), c), e), g) – nie **poziom B** a) $-\frac{13}{7}$ b) -11 c) $-7{,}5$ d) 1 e) $-\frac{3}{2}$ f) -1 g) -2 h) $\sqrt{2}$ i) $-\frac{4}{25}$ j) $-0{,}3$ **poziom C** a) $2\sqrt{3}x^3y^5$ b) $10{,}5x^4y$ c) $9a^3b^2$ d) $\frac{5}{2}s^5t^2$ e) $6p^7r^2$ f) $-24\sqrt{2}a^6b^2$ g) $8\sqrt{5}g^5h^4$ h) $-p^5r^6$ i) $\frac{3}{2}\sqrt{2}atx^2$ **poziom D** a) $-4{,}5a^5b^5$ b) $-\frac{8}{3}s^4t^3$ c) $\frac{5}{2}x^5y^4$ d) $0{,}5x^5y^3$ e) $7{,}5g^4h^3$ f) $-12a^4b^5$ g) $8\sqrt{3}p^6r^5$ h) $0{,}1c^5d^5$ **2.** a) o^2z b) a^2k^2w c) $a^3ekm^2t^2y$ d) $e^2in^2rt^2$ **3.** karat, karta, katar, krata, tarka, ratka **4.** jednomiany: xy, $\frac{xy}{2}$, $\frac{xy}{2}$, inne wyrażenie: $\frac{(x+y)z}{2}$ **5.** a) $-16a^2b^2$ b) $-2a^2b^2c$ c) $-\frac{8}{3}a^3b^5$ d) $32a^2b^4c$ e) $\frac{32}{3}a^4b^3$

6. Jaki jednomian należy wpisać w miejsce ?

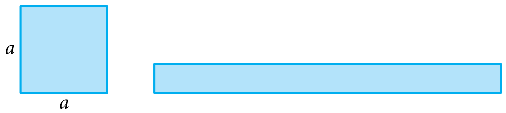
a) $3x \cdot ? = 6x^3y^2$

b) $5p^2q \cdot ? = \frac{1}{2}p^4q^2r$

c) $\frac{1}{3}ab^2 \cdot ? = -\frac{1}{9}a^4b^3$

d) $? \cdot 0{,}125kl^2m = -16kl^3m^2$

7. Na rysunku przedstawiono kwadrat o boku a oraz prostokąt, którego jeden bok jest cztery razy dłuższy od boku kwadratu, a drugi bok – trzykrotnie krótszy od boku kwadratu. Zapisz w postaci jednomianów pola kwadratu i prostokąta. Oblicz pola obu czworokątów dla $a = 12$ cm.



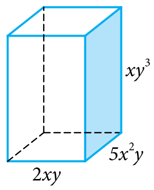
8. Długość krawędzi sześcianu jest równa $2a^2b$. Zapisz za pomocą jednomianu i oblicz dla $a = 3$ i $b = \frac{1}{3}$:

a) pole powierzchni całkowitej tego sześcianu, b) objętość tego sześcianu.

9. Na rysunku przedstawiono prostopadłościan o wymiarach $2xy \times 5x^2y \times xy^3$. Zapisz w postaci jednomianu i oblicz dla $x = \frac{1}{2}$ i $y = 2$:

a) pola ścian bocznych tego prostopadłościanu,

b) objętość tego prostopadłościanu.



10. Oto algebraiczna tabliczka mnożenia. Iloczyny w niej zasłonięto literami. Oblicz te iloczyny, zapisz je w postaci uporządkowanych jednomianów i znajdź wśród wyrażeń poniżej.

$15,\ a^6,\ 3a^3,\ 3a^5,\ 5a^3,\ 9a^3,\ 3a^4,\ 9a,\ 15a^2$

Litery odpowiadające kolejnym iloczynom utworzą hasło.

$\cdot$	3	$3a^2$	a^3
5	B	A	R
$3a$	C	Z	Y
a^3	S	T	Y

$3a^2 \cdot a^3$

11. Czy wyrażenie $-2x$ może opisywać wysokość trójkąta? A pole kwadratu o boku, którego długość jest wyrażona liczbą całkowitą? Jeśli nie – wyjaśnij dlaczego. Jeśli tak – narysuj przykład takiej figury. Jaką liczbą jest wtedy x?

12. Przerysuj diagram, a następnie uzupełnij, tak aby otrzymać kwadrat magiczny, w którym **iloczyn** jednomianów w każdym wierszu, każdej kolumnie i po obu przekątnych jest taki sam.

$8xy^2$	?	?
$16xy^2$	$4xy^2$	?
$\frac{1}{2}xy^2$	?	?

Odpowiedzi

Zadania 6. a) $2x^2y^2$ **b)** $0{,}1p^2qr$ **c)** $-\frac{1}{3}a^3b$ **d)** $-128lm$ **7.** kwadrat: a^2, 144 cm², prostokąt: $\frac{4}{3}a^2$, 192 cm² **8. a)** $24a^4b^2$, 216 **b)** $8a^6b^3$, 216 **9. a)** $2x^2y^4$, 8; $5x^3y^4$, 10 **b)** $10x^4y^5$, 20 **10.** BYSTRZYCA **11.** może, jeśli x jest liczbą ujemną **12.** od pierwszego wiersza: $\frac{1}{4}xy^2$, $32xy^2$, xy^2, $64xy^2$, $2xy^2$

Zadania 7.–9. pokazują związek języka algebry z figurami geometrycznymi, wyrażenia w przykładach są jednak nieco bardziej skomplikowane niż poznane wcześniej. Podczas rozwiązywania zadania 9. warto sprawdzić, czy uczniowie nie mają kłopotów z oznaczeniem boku prostopadłościanu $2xy$ lub $5x^2y$, i uświadomić im, że te jednomiany nie mają nic wspólnego ani z polem powierzchni, ani z objętością, ani z jednostkami pola i objętości. Uczniom słabszym można polecić ułożenie kilku przykładów na wzór zadania 6. i wykorzystanie ich w zgadywance.

Rozwiązania

8. 10. a) $P = 6 \cdot (2a^2b)^2 = 24a^4b^2$; jeżeli $a = 3$ i $b = \frac{1}{3}$, to $P = 24 \cdot 3^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 24 \cdot 81 \cdot \frac{1}{9} = 216$.

b) $V = (2a^2b)^3 = 8a^6b^3$; jeżeli $a = 3$ i $b = \frac{1}{3}$, to $V = 8 \cdot 3^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 8 \cdot 729 \cdot \frac{1}{27} = 216$.

9. a) Pola ścian bocznych: $P_1 = (2xy) \cdot (xy^3) = 2x^2y^4$; $P_2 = (5x^2y) \cdot (xy^3) = 5x^3y^4$; jeżeli $x = \frac{1}{2}$ i $y = 2$, to $P_1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^4 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^2 \cdot 4 = 8$;

$P_2 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^4 = 5 \cdot \frac{1}{8} \cdot 16 = 5 \cdot 2 = 10$.

b) $V = (2xy) \cdot (5x^2y) \cdot (xy^3) = 10x^4y^5$; jeżeli $x = \frac{1}{2}$ i $y = 2$, to $V = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2^5 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 2^4 \cdot 2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^4 \cdot 2 = 10 \cdot 1^2 \cdot 2 = 20$.

11. Może tak być, kiedy x jest liczbą ujemną. Wtedy $-2x > 0$. Na przykład dla $x = -2$ mamy równość: $-2x = -2 \cdot (-2) = 4$.

12. $I = 8x^2 \cdot 16xy^2 \cdot \frac{1}{2}xy^2 = 64x^3y^6$ – stały iloczyn.

$I = 16xy^2 \cdot 4xy^2 \cdot C = 64x^2y^4C$, więc $C = xy^2$.

$I = \frac{1}{2}xy^2 \cdot 4xy^2 \cdot B = 2x^2y^4B$, więc $B = 32xy^2$.

$I = 8xy^2 \cdot B \cdot A = 8xy^2 \cdot 32xy^2 \cdot A = 256x^2y^2$,

więc $A = \frac{1}{4}xy^2$. $I = A \cdot 4xy^2 \cdot D = \frac{1}{4}xy^2 \cdot 4xy^2 \cdot D = x^2y^2$,

więc $D = 64xy^2$. $I = 8xy^2 \cdot 4xy^2 \cdot E = 32x^2y^4 \cdot E$,

więc $E = 2xy^2$.

Warto jeszcze sprawdzić pozostałe równości.

Dla dociekliwych

Liczbę 429 można zapisać w postaci:
$429 = 4 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 9$.
Ogólnie – liczbę o cyfrze setek a, cyfrze dziesiątek b i cyfrze jedności c możemy zapisać w postaci: $100a + 10b + c$.

1. Zapisz wyrażenie oznaczające liczbę dwucyfrową o cyfrze dziesiątek x i cyfrze jedności y.

2. Zapisz wyrażenie oznaczające liczbę z zadania 1 po przestawieniu cyfr.

3. Zapisz wyrażenie, za pomocą którego arkusz kalkulacyjny oblicza liczbę trzycyfrową na podstawie cyfr podanych w trzech osobnych komórkach.

W komórki B7, C7, D7 wpisujemy ręcznie poszczególne cyfry. W komórce E7 ma pojawić się liczba trzycyfrowa.

B7 fx 3

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7		3	8	7	387
8					

4. Udowodnij, że gdy do dowolnej liczby dwucyfrowej dodamy liczbę powstałą po przestawieniu jej cyfr, otrzymamy sumę podzielną przez 11.

5. Zapisujemy dowolną liczbę trzycyfrową, a następnie dwa razy przenosimy pierwszą cyfrę na koniec. W ten sposób otrzymujemy trzy liczby (np. 123, 231 i 312). Udowodnij, że suma tak uzyskanych trzech liczb zawsze jest podzielna przez 37.

Czy już umiem?

I. Czy podane wyrażenie jest jednomianem?

a) $\frac{2}{3}d^2c \cdot (-5)dc$ b) $5(ab - a^2)$ c) $\sqrt{2}mn$ d) $5xy + 3x$ e) $(prt)^3$

II. Podaj współczynnik liczbowy jednomianu.

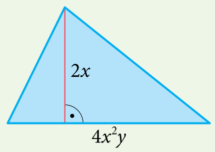
a) $-4xy^2$ b) $2x^3$ c) ab^2 d) $-ab^2$ e) $4xy \cdot (-3)$

III. Uporządkuj jednomian.

a) $-3a^3b^2 \cdot (-2)a^2b$ c) $-\frac{4}{9}hgg \cdot (-6)h^4$

b) $cd^2c \cdot (-4)^2d$ d) $pr \cdot 4(rp)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

IV. Zapisz wyrażenie, za pomocą którego można obliczyć pole trójkąta przedstawionego na rysunku, i uporządkuj je.



Odpowiedzi

Dla dociekliwych **1.** $10x + y$ **2.** $10y + x$ **3.** $B7 \cdot 100 + C7 \cdot 10 + D7$

Czy już umiem? **I. a), c), e)** tak **b), d)** nie **II. a)** -4 **b)** 2 **c)** 1 **d)** -1 **e)** -12

III. a) $6a^5b^3$ **b)** $16c^2d^3$ **c)** $\frac{8}{3}g^2h^5$ **d)** $-3p^3r^3$ **IV.** $4x^3y$

Rozwiązania

Dla dociekliwych

4. x – cyfra dziesiątek, y – cyfra jedności
Rozważana suma jest równa
$(10x + y) + (10y + x) = 11x + 11y = 11(x + y)$, czyli jest to liczba podzielna przez 11.

5. x, y, z – cyfra setek, dziesiątek, jedności
Rozważana suma to
$(100x + 10y + z) + (100y + 10z + x) + (100z + 10x + y) =$
$= 111x + 111y + 111z = 111(x + y + z) = 37 \cdot 3(x + y + z)$, czyli jest to liczba podzielna przez 37.

dlanauczyciela.pl | Kartkówka IV.3

4 Redukcja wyrazów podobnych

Na dobry początek

Kto z nas nie lubi zagadek? Wykonaj poniższe polecenia i przekonaj się, że niezależnie od wybranej liczby na końcu zawsze otrzymasz 8.

- Pomyśl liczbę.
- Pomnóż ją przez 2.
- Do wyniku dodaj 8.
- Odejmij teraz początkową liczbę.
- Odejmij jeszcze raz początkową liczbę.
- Podaj wynik.

Pytania i polecenia

- Porównaj swoje wyniki z wynikami koleżanek i kolegów. Co możesz powiedzieć o tych wynikach? Dlaczego są takie, a nie inne?
- Pomyślaną liczbę oznacz literą x, a następnie zapisz kolejne kroki zagadki przy użyciu tego oznaczenia. Co się dzieje z liczbą x?

193

Odpowiedzi

- W kolejnych krokach usuwa się wyrazy zależne od pomyślanej liczby.
- 1. x 2. $2x$ 3. $2x+8$ 4. $x+8$ 5. 8 Liczba x zostaje usunięta z sumy.

Uwagi metodyczne

Na realizację tematu przewidziano 2 godziny lekcyjne.

Popularna zagadka w starterze powinna zachęcić uczniów do układania podobnych zagadek.

Dodatek do wstępu

Zagadka dla szybkich rachmistrzów:

Pomyśl jakąś liczbę.

Dodaj do niej 3.

Wynik podziel przez 2.

Od wyniku odejmij połowę pomyślanej liczby.

Wyszło 1,5, prawda?

Wyjaśnij dlaczego. Wymyśl podobną zagadkę z pięcioma krokami.

Odpowiedź

$(x+3):2-0{,}5x=1{,}5$, bo x się redukuje.

Jest to temat bardzo techniczny, ale niezbędny przy posługiwaniu się wyrażeniami algebraicznymi. Wiele błędów popełnianych przez uczniów przy redukcji wyrazów podobnych wynika z nieuwagi i nieprawidłowej oceny, które wyrazy są, a które nie są podobne. Uczniowie mylą a^2b z b^2a, przy mnożeniu $abc \cdot a^2bc$ podają wynik a^3bc itd. Podobieństwo wyrażeń algebraicznych wprowadzajmy więc stopniowo i powoli, ze sporą liczbą przykładów.

POMOCNE BĘDĄ:

1. kostki domina (patrz s. 197).

UMIEJĘTNOŚCI

Uczeń już potrafi:
- rozpoznawać jednomiany
- porządkować jednomiany
- mnożyć jednomiany

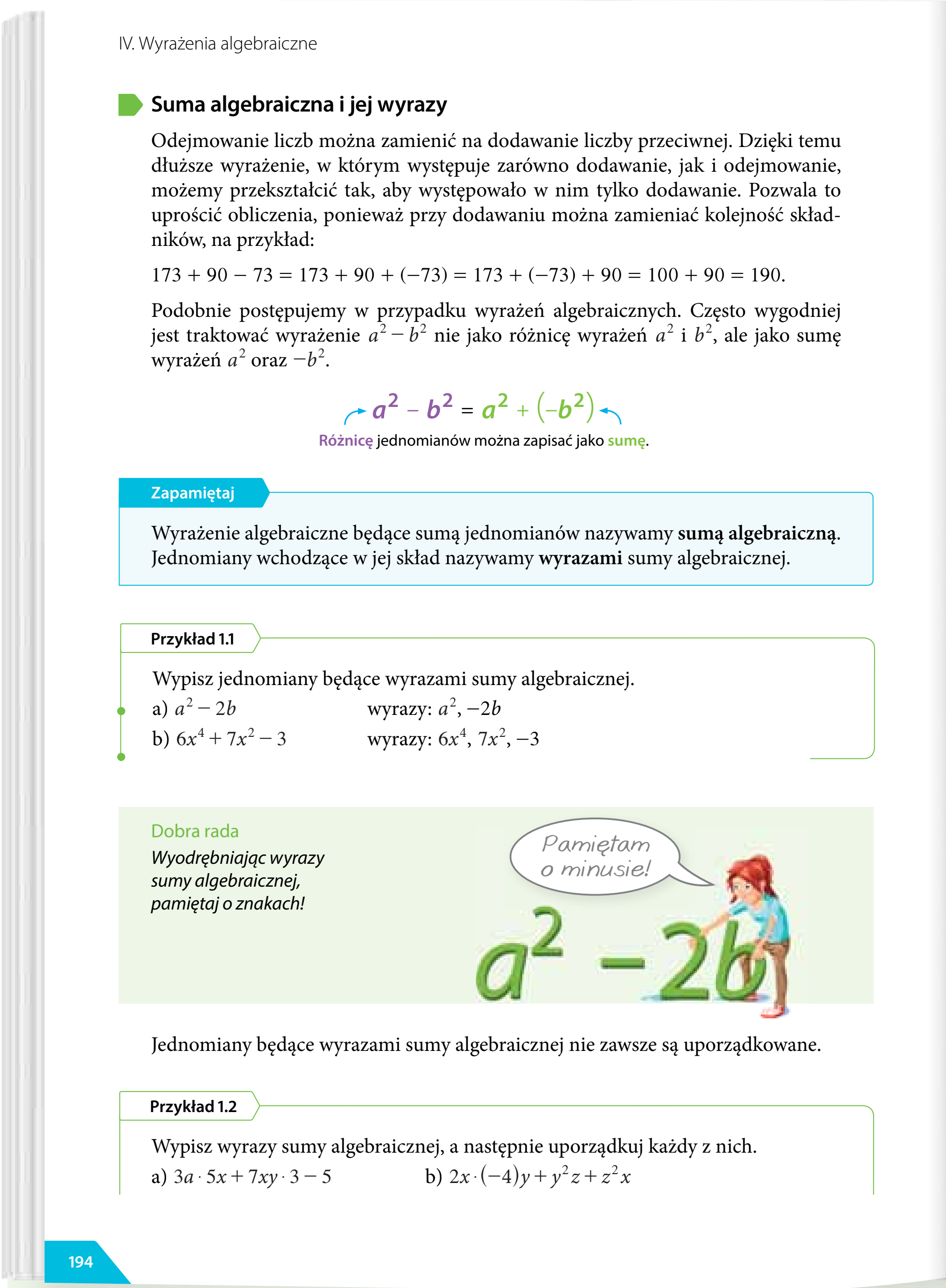
Uczeń będzie umiał:
- dodawać jednomiany podobne (tzn. różniące się jedynie współczynnikiem liczbowym)
- dodawać i odejmować sumy algebraiczne z redukcją wyrazów podobnych

Rozdział	IV (18 godzin)							V (16 godzin)						VI (13 godzin)					VII (11 godzin)				
Temat	1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	P	1	2	3	4	P	1	2	3	4	P
Godziny lekcyjne (razem 125)																							
Miesiące	II					III				IV					V				VI				
Semestr																							

IV.4

Rozdział IV WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

Lekcję rozpoczynamy od przykładów sum algebraicznych. Po zapoznaniu uczniów z przykładami wyrażeń podobnych polećmy, aby każdy z nich napisał na tablicy lub w zeszycie samodzielnie wymyślony przykład takiego wyrażenia. Kluczowe dla tej lekcji jest rozpoznawanie wyrazów podobnych. „Podobny” w języku potocznym ma wiele znaczeń, nie powinno więc dziwić, że uczniowie się mylą. Bardzo potrzebny będzie dobry trening.



IV. Wyrażenia algebraiczne

Suma algebraiczna i jej wyrazy

Odejmowanie liczb można zamienić na dodawanie liczby przeciwnej. Dzięki temu dłuższe wyrażenie, w którym występuje zarówno dodawanie, jak i odejmowanie, możemy przekształcić tak, aby występowało w nim tylko dodawanie. Pozwala to uprościć obliczenia, ponieważ przy dodawaniu można zamieniać kolejność składników, na przykład:

$173 + 90 - 73 = 173 + 90 + (-73) = 173 + (-73) + 90 = 100 + 90 = 190.$

Podobnie postępujemy w przypadku wyrażeń algebraicznych. Często wygodniej jest traktować wyrażenie $a^2 - b^2$ nie jako różnicę wyrażeń a^2 i b^2, ale jako sumę wyrażeń a^2 oraz $-b^2$.

$$a^2 - b^2 = a^2 + (-b^2)$$

Różnicę jednomianów można zapisać jako sumę.

Zapamiętaj

Wyrażenie algebraiczne będące sumą jednomianów nazywamy **sumą algebraiczną**. Jednomiany wchodzące w jej skład nazywamy **wyrazami** sumy algebraicznej.

Przykład 1.1

Wypisz jednomiany będące wyrazami sumy algebraicznej.

a) $a^2 - 2b$ wyrazy: a^2, $-2b$

b) $6x^4 + 7x^2 - 3$ wyrazy: $6x^4$, $7x^2$, -3

Dobra rada

Wyodrębniając wyrazy sumy algebraicznej, pamiętaj o znakach!

Jednomiany będące wyrazami sumy algebraicznej nie zawsze są uporządkowane.

Przykład 1.2

Wypisz wyrazy sumy algebraicznej, a następnie uporządkuj każdy z nich.

a) $3a \cdot 5x + 7xy \cdot 3 - 5$ b) $2x \cdot (-4)y + y^2z + z^2x$

194

a) $3a \cdot 5x + 7xy \cdot 3 - 5$

Jednomiany w sumie algebraicznej są rozdzielone znakami dodawania i odejmowania.

$3a \cdot 5x + 7xy \cdot 3 + (-5)$

Wyrazami tej sumy są: $3a \cdot 5x$, $7xy \cdot 3$ oraz -5, czyli $15ax$, $21xy$ i -5.

b) $2x \cdot (-4)y + y^2z + z^2x = 2x \cdot (-4)y + y^2z + z^2x$

Wyrazy: $2x \cdot (-4)y$, y^2z, z^2x, czyli $-8xy$, y^2z, xz^2.

Zauważ, że w iloczynie $2x \cdot (-4)y$ minus jest znakiem liczby ujemnej, nie oznacza on odejmowania jednomianów.

Ćwiczenie 1

Wypisz jednomiany będące wyrazami sumy algebraicznej.

a) $a^2 - 2ab + b^2$ b) $-x^3 + 3x^2 - x^2 + 1$ c) $c^5 - c^3 - 1{,}5c + 0{,}5c$

d) $52a \cdot 2b + 3a \cdot (-x)(-y) \cdot z - 2x - 3x \cdot (-12)y + 4x^2y : 3 + 1$

Wyrazy podobne

O wyrazach sumy algebraicznej, które różnią się co najwyżej współczynnikiem liczbowym, mówimy, że są **podobne**, np.: $3x^2$ i $-x^2$ lub $-1{,}5c$ i $0{,}5c$.

Przykład 2

W podanej sumie algebraicznej wskaż wyrazy podobne.

a) $4x + 5y + 3x + 2z - y$ b) $-3a^2b - 2ab^2 + 5a^2b^2 - 4a^2b + 7$

a) $4x + 5y + 3x + 2z - y$, wyrazy podobne to $4x$ i $3x$ oraz $5y$ i $-y$.

b) $-3a^2b - 2ab^2 + 5a^2b^2 - 4a^2b + 7$, wyrazy podobne to $-3a^2b$ i $-4a^2b$.

Ćwiczenie 2

Wskaż wyrazy podobne w podanej sumie algebraicznej.

a) $8x^3 + 6x^2 - 4x^3 + 2x$ b) $3xy^2 + 3x^2y - xy^2$ c) $6x^4 + 8xy - 4xy + y^4$

Dobra rada

Łatwo zauważysz wyrazy podobne w sumie algebraicznej, jeśli:
- *najpierw wyodrębnisz jednomiany, czyli wyrazy sumy,*
- *następnie uporządkujesz każdy wyraz.*

$$a^2b^2a \cdot (-2a) + ab^2a - 3a^4b^2 = \underline{-2a^4b^2} + a^2b^2 \underline{- 3a^4b^2}$$

Tu nie widać wyrazów podobnych. Tu widać wyrazy podobne.

Odpowiedzi

Ćwiczenia 1. a) $a^2, -2ab, b^2$ **b)** $-x^3, 3x^2, -x^2, 1$ **c)** $c^5, -c^3, -1{,}5c, 0{,}5c$ **d)** $52a \cdot 2b, 3a \cdot (-x)(-y) \cdot z, -2x, -3x \cdot (-12)y, 4x^2y : 3, 1$ **2. a)** $8x^3$ i $-4x^3$ **b)** $3xy^2$ i $-xy^2$ **c)** $8xy$ i $-4xy$

Przykłady i ćwiczenia warto rozszerzyć. Polećmy uczniom ułożenie do każdego ćwiczenia chociaż po jednym własnym przykładzie, a małym grupom – wykonanie domina wyrazów podobnych.

Dodatek do przykładu 3.

Warto rozpocząć od wyrażenia $2p + 5p$, przypominając uczniom, co mogą oznaczać litery. Na przykład: Jacek kupił 2 pączki, a potem jeszcze 5 pączków. Ile pączków kupił w sumie?
Następnie dołożyć b (beza): $2p + b + 5p$. W takim kontekście działanie nie powinno sprawiać trudności. I dalej: $2p + b + 5p + 6b$. Pytanie dodatkowe: Czy Jacek kupił tyle samo pączków co bez?

Grupy otrzymują zapis sumy algebraicznej, np.: $12x + 4y - 3$. Każdej grupie można przydzielić inną sumę. Każdy uczeń w ciągu trzech minut stara się zapisać możliwie dużo sum algebraicznych, które po zredukowaniu wyrazów podobnych są równe $12x + 4y - 3$. Uczniowie w grupach sprawdzają wzajemnie poprawność zapisów i zliczają dobre rozwiązania. Wygrywa uczeń, który zapisał najwięcej poprawnych możliwości.

Uczniowie w grupach rozwiązują zadania typu:

W miejsce ? wstaw takie jednomiany, aby równość była prawdziwa.

a) $2x - y + ? + ? = 9x + y$

b) $4ab - (? + ?) + 9ac = 2ab + 5ac$

c) $7x^2 - (? + 2x) + (4x^2 + ?) = 9x^2 - 5x$

Odpowiedzi

a) $7x$; $2y$ b) $2ab$; $4ac$ c) $2x^2$; $-3x$

Następnie uczniowie w parach układają po pięć podobnych równań i przekazują je innym parom do rozwiązania.

IV. Wyrażenia algebraiczne

Redukcja wyrazów podobnych

Jednomiany będące wyrazami podobnymi możemy dodawać. W ten sposób uprościmy zapis sumy algebraicznej.

Zapamiętaj

Dodawanie wyrazów podobnych nazywamy **redukcją wyrazów podobnych**.

Przykład 3

Zredukuj wyrazy podobne.

a) $5p + p = 6p$ — $5p = p + p + p + p + p$

b) $p + x + 4p = 5p + x$ — Zmieniamy kolejność: $p + x + 4p = p + 4p + x$.

c) $\underline{x} + \underline{\underline{3x^2}} \underline{- 2x} + 1 + \underline{\underline{x^2}} + 2 =$
$= \underline{\underline{3x^2}} + \underline{\underline{x^2}} + \underline{x} \underline{- 2x} + 1 + 2 = 4x^2 - x + 3$ — Wyrazy podobne podkreślamy tak samo.

d) $2x^2y + 3xy^2$ — To nie są wyrazy podobne – nie możemy nic zredukować.

e) $ab^2a \cdot (-2a^2) + ab^2a - 3a^4b^2 =$
$= \underline{-2a^4b^2} + a^2b^2 \underline{- 3a^4b^2} = -5a^4b^2 + a^2b^2$ — Porządkujemy poszczególne jednomiany.

Ćwiczenie 3

Zredukuj wyrazy podobne.

a) $3x + 2x$

b) $4xy^2 + 3x^2 - 2xy^2 + 7 + x^2 - 3$

c) $x^2yx \cdot (-4y) - 5y^2 \cdot (-x^4) + xy^2x^2 - 2x^4y^2$

Opuszczanie nawiasów

Nawias, przed którym stoi znak plus, można po prostu opuścić, ponieważ składniki w dodawaniu można dodawać w dowolnej kolejności, np. $2 + (3 + 4) = 2 + 3 + 4$.

Inaczej jest, gdy przed nawiasem znajduje się minus.
Przyjrzyj się obliczeniom.

- $12 - (10 - 3) = 12 - 7 = 5$

  Ania miała 12 zł. Postanowiła kupić galaretkę, która zwykle kosztowała 10 zł, ale tego dnia w promocji można było ją kupić o 3 zł taniej. Ile pieniędzy jej zostało?

- $12 - 10 + 3 = 2 + 3 = 5$

  Ania miała 12 zł. Kupowała galaretkę. Dała kasjerce banknot 10 zł i dostała 3 zł reszty. Ile pieniędzy jej zostało?

Wyrażenie $12 - (10 - 3)$ ma tę samą wartość co wyrażenie $12 - 10 + 3$. Podobnie jest z wyrażeniami algebraicznymi.

Odpowiedzi

Ćwiczenia 3. a) $5x$ b) $2xy^2 + 4x^2 + 4$ c) $3x^4y^2 - 3x^3y^2$

Zapamiętaj

Jeśli przed nawiasem jest znak minus, to opuszczając nawias, należy zmienić znak każdego wyrazu w nawiasie na przeciwny.

$-(\blacksquare + \blacksquare - \blacksquare) = -\blacksquare - \blacksquare + \blacksquare$

Przykład 4

Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $3x+(4x-3y+z)$ b) $3x-(4x-3y+z)$

a) $3x+(4x-3y+z) = \underline{3x} + \underline{4x} - 3y + z = 7x - 3y + z$ — Opuszczamy nawiasy bez zmiany znaków poszczególnych wyrazów, ponieważ przed nawiasem jest znak plus.

b) $3x-(4x-3y+z) = \underline{3x} \, \underline{-4x} + 3y - z = -x + 3y - z$ — Opuszczamy nawiasy, zmieniając znak każdego wyrazu w nawiasie na przeciwny, ponieważ przed nawiasem jest znak minus.

Ćwiczenie 4

Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $(4x^2-6x)-(2x^2-7)$ b) $-(2x^3-4)-(x^3+2x^2-6)$

Przykład 5

Jacek wymyślił sztuczkę magiczną: *Pomyśl dowolną liczbę. Dodaj 20. Odejmij 16. Odejmij liczbę, którą pomyślałeś na początku. A teraz zgadnę: wynikiem jest 4.*

a) Sprawdź sztuczkę Jacka dla kilku liczb. Czy możesz mieć pewność, że będzie działać także dla dowolnej innej liczby?

b) Uzasadnij sztuczkę Jacka za pomocą wyrażeń algebraicznych.

a) Sprawdźmy sztuczkę dla liczb 10, 5 i 20.

$10 + 20 - 16 - 10 = 30 - 16 - 10 = 4$

$5 + 20 - 16 - 5 = 25 - 16 - 5 = 4$

$20 + 20 - 16 - 20 = 40 - 16 - 20 = 4$

Sprawdzenie sztuczki dla kilku liczb, a nawet dla kilku milionów liczb, nie gwarantuje, że wynik jest taki sam dla **wszystkich** liczb.

b) Oznaczmy pomyślaną liczbę literą x. Zgodnie z poleceniami Jacka otrzymujemy:

$x + 20 - 16 - x = x + 4 - x = 4.$

Teraz możemy mieć pewność, że sztuczka działa zawsze.

Ćwiczenie 5

Pomyśl jakąś liczbę. Dodaj do niej 7. Następnie odejmij 6, potem dodaj 4. Odejmij liczbę pomyślaną na początku. Podaj wynik. Uzasadnij za pomocą wyrażeń algebraicznych, że wynik będzie zawsze taki sam.

Z. ĆWICZEŃ 1–4 5–8

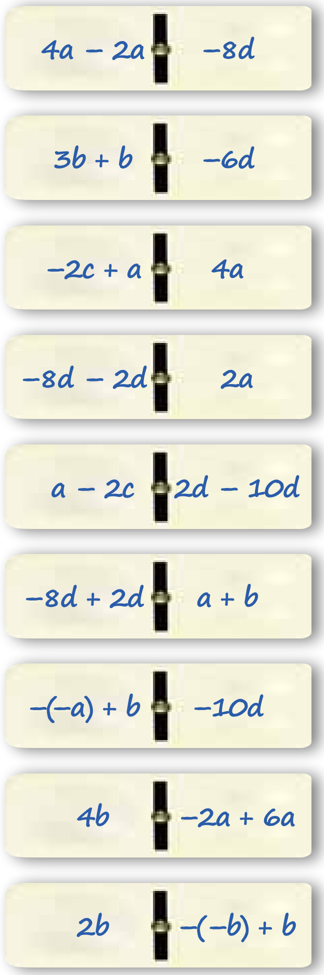
197

Odpowiedzi

Ćwiczenia 4. a) $2x^2-6x+7$ b) $-3x^3-2x^2+10$ 5. 5

Często popełniany błąd – a nie wynika on niestety ze zwykłej nieuwagi – pojawia się przy opuszczaniu nawiasów, jeśli przed nawiasem znajduje się znak minus. Wielu uczniów zmienia znak wyłącznie przy pierwszym wyrazie stojącym w nawiasie. Błąd powraca uporczywie w starszych klasach, a wytępienie go jest bardzo trudne. Mogą to być pozostałości błędów popełnianych przez uczniów podczas ćwiczenia działań na liczbach całkowitych. Warto uważnie sprawdzać ich prace, aby nie przeoczyć takich błędów i nie pozwolić na ich utrwalenie.

Uczniom, którym działania na wyrażeniach algebraicznych wciąż sprawiają kłopoty, przyda się domino algebraiczne, najlepiej stworzone samodzielnie. Oto przykład.



Zadanie z kluczem

Poziomy:
A – wypisywanie wyrazów sumy algebraicznej – wyrazy są jednomianami uporządkowanymi,
B – wypisywanie wyrazów sumy algebraicznej – wyrazy są jednomianami nieuporządkowanymi,
C – rozpoznawanie wyrazów podobnych,
D – redukcja wyrazów podobnych,
E – opuszczanie nawiasów redukcja wyrazów podobnych,
MISTRZ – opuszczanie zagnieżdżonych nawiasów redukcja wyrazów podobnych.

Dodatkowe zadanie

Wykonaj działania.

a) $p+[q-(p-q)]$
b) $p-[q-(p+q)]$
c) $[q-(-p+q)]-[q-(q+p)]$
d) $[p-(-p-q)]-[q-(q-p)]$
e) $3a-[-2b+(a-b)]-[4a-(b-a)]$
f) $2x^2-\left[y^2-\left(2x^2-y^2\right)\right]-\left(3x^2+2y^2\right)$
g) $\left[3x^2-\left(y^2-2x^2\right)\right]+\left[4y^2-\left(-x^2+5y^2\right)\right]$
h) $[(3s-t)-(3t-s)]+[(6s+t)-(6s-t)]$

Odpowiedź

a) $2q$ **b)** $2p$ **c)** $2p$ **d)** $p+q$ **e)** $4b-3a$
f) x^2-4y^2 **g)** $6x^2-2y^2$ **h)** $4s-2t$

Zadania

ZB. ZADAŃ 1–8 9–17 18–28

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz trzy kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A ← P1.1 Wypisz wyrazy sumy algebraicznej.

a) $3x+7y+5$
b) $9xy-3x+y^2$
c) b^2-4ac
d) $-\frac{1}{2}n^2+8n-4$
e) $-3a^2+2ab-b^2$
f) $c^3-3bc-\frac{1}{3}b^2c$

poziom B ← P1.2 Wypisz wyrazy sumy algebraicznej.

a) $2x\cdot 3y+3xy\cdot 4-1$
b) $3a\cdot(-1)b+(-2)ab\cdot(-3)$
c) $-6p\cdot(-2)r+2p\cdot(-r)-2r$
d) $-1\cdot s\cdot(-2t)+7s\cdot t+2s\cdot 3t$
e) $3-m\cdot(-5)n+6m\cdot n^3-m\cdot(-3)n^2$
f) $4g-(-2)\cdot h+7g\cdot(-3h)-8gh$

poziom C ← P2 Wskaż wyrazy podobne w sumie algebraicznej.

a) $3x^2+8x+8x^2-3x$
b) $2p^3+3p^2+2p+\frac{1}{2}p^2$
c) $-3x^3y^2+2x^2y^3+3x^3y^2$
d) $9x^2y-6xy-6xy^2+\frac{1}{2}x^2y$
e) $6pq-11p^2q^2-5p^2q+7p^2q+3pq^2$
f) $-3x^2+3y^2+3x+2xy+3y-xy$

poziom D ← P3 Zredukuj wyrazy podobne.

a) $11x^3-6x^2-7x^2$
b) $9x^3y-7x^2+8x^2-9y$
c) $6x^3y^2-x^3y+4x^3y-x^3y^2$
d) $12x-7y-3x+y+x$
e) $2x^2y-xy+6x^2y$
f) $xyz^2-4yz^2+4xyz^2+2yz$
g) $-2a+b+4b-7a+9$
h) $4xy^2+6x^2y-2y^2x$
i) $3k^3-2k+k^2-2k^2-k+9k^3$
j) $5a^2+2ab-a^2b+ab-3a^2$

poziom E ← P4 Opuść nawiasy i zredukuj wyrazy podobne.

a) $(x+4y-3xy)-(2x-y+2xy)$
b) $-(-a+4ab)+(2a-3ab)$
c) $-(-2p+2r)-(3p-r)-2r$
d) $-st-(-2t+s)+(4s+t-2st)$
e) $4-(m+5-n)+(6m-n)-(-4)$
f) $4g-(-2h+g-3)-5h$

MISTRZ Wśród podanych pięciu sum algebraicznych są dwie pary wyrażeń równych. Wskaż je.

I. $-(x-2)-\left[x-(5-2x)\right]-5x$
II. $-x-(2-x)-(5-2x)-5x$
III. $-(x-2)-\left[x-(5-2x)-5x\right]$
IV. $-x-\left[2-(x-5)-2x\right]-5x$
V. $-\left[x-(2-x)-(5-2x)\right]-5x$

Odpowiedzi

Zadania 1. poziom A **a)** $3x$, $7y$, 5 **b)** $9xy$, $-3x$, y^2 **c)** b^2, $-4ac$ **d)** $-\frac{1}{2}n^2$, $8n$, -4 **e)** $-3a^2$, $2ab$, $-b^2$ **f)** c^3, $-3bc$, $-\frac{1}{3}b^2c$ **poziom B a)** $2x\cdot 3y$, $3xy\cdot 4$, -1 **b)** $3a\cdot(-1)b$, $(-2)ab\cdot(-3)$ **c)** $-6p\cdot(-2)r$, $2p\cdot(-r)$, $-2r$ **d)** $-1\cdot s\cdot(-2t)$, $7s\cdot t$, $2s\cdot 3t$ **e)** 3, $-m\cdot(-5)n$, $6m\cdot n^3$, $-m\cdot(-3)n^2$ **f)** $4g$, $-(-2)\cdot h$, $7g\cdot(-3h)$, $-8gh$ **poziom C a)** $3x^2$ i $8x^2$ oraz $8x$ i $-3x$ **b)** $3p^2$ i $\frac{1}{2}p^2$ **c)** $-3x^3y^2$ i $3x^3y^2$ **d)** $9x^2y$ i $\frac{1}{2}x^2y$ **e)** $7p^2q$ i $-5p^2q$ **f)** $2xy$ i $-xy$ **poziom D a)** $11x^3-13x^2$ **b)** $9x^3y+x^2-9y$ **c)** $5x^3y^2+3x^3y$ **d)** $10x-6y$ **e)** $8x^2y-xy$ **f)** $5xyz^2-4yz^2+2yz$ **g)** $-9a+5b+9$ **h)** $2xy^2+6x^2y$ **i)** $12k^3-k^2-3k$ **j)** $2a^2+3ab-a^2b$ **poziom E a)** $-x+5y-5xy$ **b)** $3a-7ab$ **c)** $-p-3r$ **d)** $-3st+3t+3s$ **e)** $5m+3$ **f)** $3g-3h+3$ **MISTRZ** I i V oraz II i IV

2. Pogrupuj jednomiany podane w ramce, tak aby w jednej grupie znajdowały się jednomiany podobne. Ile grup powstało?

$6xy^2$	$-3x^2y$	$8x^2yz^2$	$4xy^2$	x^2z^2y
$-9x^2y$	$6x^2yz^2$	xy^2	$0{,}001xy^2$	$2y^2x$

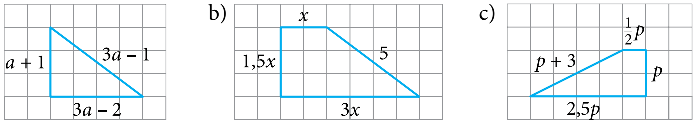
3. Redukując wyrazy podobne w wyrażeniu $7p + p$, otrzymujemy $8p$.

a) Czy jeśli obliczysz wartości wyrażeń $7p + p$ oraz $8p$ dla $p = 65$, uzyskasz ten sam wynik? Odpowiedź uzasadnij.

b) A czy dla innych wartości p też tak będzie? Odpowiedź uzasadnij.

4. Zapisz w postaci uporządkowanej wyrażenie algebraiczne opisujące obwód narysowanej figury.

a) b) c)



5. Sprawdź, czy sumy algebraiczne zapisane w polach leżących wzdłuż tej samej linii są równe.

$3\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y$	x^2+2y	$2x^2+8y$
$1\frac{1}{2}x^2$	x^2+3y	$2\frac{1}{2}x^2+3y$
$2x^2-5y$	$y+3x^2$	$3\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}x^2$

6. Dane są dwa wyrażenia algebraiczne. Wyznacz ich sumę i różnicę.

a) x, $-6x+4$

b) 8, $-(4y+5)$

c) a^2-4, $8-a^2$

d) $2x-y$, $-(x-2y)$

e) $-(2a-b)$, $2a+b$

f) $-(a-b)$, $-(a+b)$

7. Oto algebraiczna tabliczka dodawania. Sumy w niej zasłonięto literami. Oblicz te sumy, uporządkuj je i sprawdź, czy znajdują się wśród wyrażeń poniżej.

$3x^2-5x$, $-2x$, $2x^2+3x$, $5x^2-2x$, $-x^2-3x$, $4x^2-4x$, 0, x^2, x^2+x

Litery odpowiadające kolejnym sumom utworzą hasło.

+	$2x^2-x$	$3x^2+x$	x^2-2x
$-(2x^2+x)$	A	D	A
$-(x^2-2x)$	A	R	Y
$-(-2x^2+3x)$	T	I	K

$x^2-2x+\left(-(x^2-2x)\right)$

Odpowiedzi

Zadania 2. trzy grupy: I. $6xy^2$, $4xy^2$, xy^2, $0{,}001xy^2$ i $2xy^2$ II. $-3x^2y$, $-9x^2y$ III. $8x^2yz^2$, x^2z^2y, $6x^2yz^2$ **3. a)** tak **b)** Dla każdej wartości p wyniki będą takie same. **4. a)** $7a-2$ **b)** $5{,}5x+5$ **c)** $5p+3$ **5.** Wszystkie sumy są równe $5x^2+6y$ **6. a)** $-5x+4$, $7x-4$ **b)** $-4y+3$, $4y+13$ **c)** 4, $2a^2-12$ **d)** $x+y$, $3x-3y$ **e)** $2b$, $-4a$ **f)** $-2a$, $2b$
7. KARIATYDA

Dodatkowe zadania

1. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $2n$ jest liczbą parzystą. Czy suma trzech kolejnych liczb parzystych, z których pierwsza to $2n$, jest równa $2n + 6$? Wybierz odpowiedź i jej uzasadnienie spośród podanych niżej.

A. Tak, ponieważ składnikami tej sumy są $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$.

B. Tak, ponieważ sumę tę można obliczyć następująco: $2n + 2 + 4$.

C. Nie, ponieważ składnikami tej sumy są $2n$, $2n + 1$, $2n + 2$.

D. Nie, ponieważ składnikami tej sumy są $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$.

2. Dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $2n + 1$ jest liczbą nieparzystą.

a) Podaj trzy kolejne liczby nieparzyste następujące po liczbie $2n + 1$.

b) Wyznacz sumę czterech kolejnych liczb nieparzystych, jeżeli jej pierwszy składnik to $2n + 1$.

3. Liczby $2n + 1$ oraz $2n - 1$ są nieparzyste dla dowolnej liczby naturalnej n. Czy ich suma jest podzielna przez 4?

4. Liczby $2n + 1$ oraz $2n - 1$ są nieparzyste dla dowolnej liczby naturalnej n. Czy ich różnica jest podzielna przez 2?

5. Rozstrzygnij, kiedy suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 6.

Odpowiedzi

1. D

2. a) $2n + 3$, $2n + 5$, $2n + 7$ **b)** $8n + 16$

3. tak: $(2n+1)+(2n-1) = 4n$

4. tak: $(2n+1)-(2n-1) = 2n+1-2n+1 = 2$

5. Niech najmniejsza z tych liczb będzie liczbą nieparzystą $2n - 1$. Wtedy $(2n - 1) + 2n + (2n + 1) = 6n$. Jeśli zaś najmniejsza jest liczba parzysta $2n$, to $2n + (2n + 1) + (2n + 2) = 6n + 3$, a suma $6n + 3$ nie jest podzielna przez 6. Suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest zatem podzielna przez 6, jeśli najmniejsza z tych trzech liczb jest nieparzysta.

8. Poniżej podane są trzy zestawy wyrażeń algebraicznych. Dobierzcie się w trójki. Niech każda osoba w trójce wybierze inne wyrażenie z zestawu I, opuści nawiasy i zredukuje wyrazy podobne. Następnie sprawdźcie, czy otrzymaliście jednakowe wyniki. Jeśli nie – poszukajcie błędu. To samo zróbcie w pozostałych zestawach.

I. $y+2x+(y-x)$
$-3x-(-x+y)+(3x+3y)$
$3y-(-x+y)-(x-y)+(x-y)$

II. $k+(m-k)$
$2k+(k-m)-(2k+m)+(3m-k)$
$2mk+(2km-m-k)-(-2m-2k)-2k\cdot 2m-k$

III. $2a-(c-2a)$
$-(a-2c)+2a-(c-2a)-(2c-a)$
$-2+2a\cdot(-2c)-(2c-a-2)-(-a-c)+c\cdot(-2a)\cdot(-2)+2a$

Dla dociekliwych

1. Niech n będzie liczbą naturalną.
a) Jak zapisać następną liczbę naturalną? Jak jeszcze następną? A jak poprzednią?
b) Zapisz wyrażenie oznaczające sumę trzech kolejnych liczb naturalnych. Uprość je, redukując wyrazy podobne.
c) Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.
d) Czy suma kolejnych czterech liczb naturalnych jest zawsze podzielna przez 4? A suma pięciu kolejnych liczb naturalnych przez 5? Uzasadnij odpowiedzi.

2. Dla jakich k suma k kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez k? Czy umiesz uzasadnić swoje przypuszczenia?

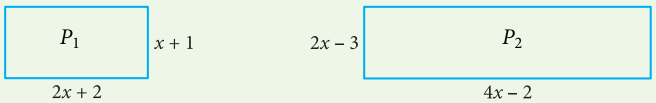
Wystarczy jeden przykład, aby stwierdzić, że jakieś zdanie nie zawsze jest prawdziwe. Jeśli jednak chcemy uzasadnić, że zdanie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej, to nie wystarczy nawet milion przykładów – trzeba przedstawić rozumowanie obejmujące wszystkie liczby.

Czy już umiem?

I. Po redukcji wyrazów podobnych w wyrażeniu $4xy+2x-x-5xy$ otrzymamy
A. $-xy+2$. B. $-xy+x$. C. $x+9xy$. D. $9xy+3x$.

II. Wykonaj działania i zredukuj wyrazy podobne.
a) $2p\cdot(-4)r-(-p+r-3pr)$ b) $3-(m-5n+6mn)-(-3m-3n+2)$

III. Dane są prostokąty P_1 i P_2. Zapisz wyrażenia oznaczające ich obwody.



Rozwiązania

Dla dociekliwych

1. a) $n+1$, $n+2$, $n-1$
b) $n+(n+1)+(n+2)=n+n+1+n+2=3n+3$
c) Jeśli n jest najmniejszą z trzech kolejnych liczb naturalnych, to ich suma jest równa $3n+3=3(n+1)$, więc jest podzielna przez 3.
d) Suma czterech kolejnych naturalnych:
$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=n+n+1+n+2+n+3=$
$=4n+6=4(n+1)+2$, więc nie jest podzielna przez 4.
Suma pięciu kolejnych liczb naturalnych:
$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=$
$=n+n+1+n+2+n+3+n+4=5n+10=5(n+2)$, więc jest podzielna przez 5.
2. Suma k kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez k, kiedy k jest liczbą nieparzystą.
Uzasadnienie.
I. k jest liczbą nieparzystą, $k=2m+1$, gdzie m jest liczbą naturalną dodatnią. Niech $n-m$ będzie najmniejszą z k kolejnych liczb naturalnych. Wtedy ich suma jest równa:
$(n-m)+\ldots+(n-1)+n+(n+1)+\ldots+(n+m)=$
$=(2m+1)n=kn$, czyli ta suma jest podzielna przez k.
II. k jest liczbą parzystą dodatnią, $k=2m$, gdzie m jest liczbą naturalną dodatnią. Niech $n-m$ będzie najmniejszą z k kolejnych liczb naturalnych. Wtedy ich suma jest równa:
$(n-m)+\ldots+(n-1)+n+(n+1)+\ldots+(n+m-1)=$
$=2mn-m=kn-m$, więc nie jest to liczba podzielna przez k (bo $1\leqslant m<k$).

Odpowiedzi

Zadania 8. I. $x+2y$ II. m III. $4a-c$
Dla dociekliwych 1. a) $n+1$, $n+2$, $n-1$ b) $3n+3$ d) nie, tak 2. dla k nieparzystych
Czy już umiem? I. B II. a) $-5pr+p-r$ b) $-6mn+2m+8n+1$
III. $L_1=6x+6$, $L_2=12x-10$

dlanauczyciela.pl | Kartkówka IV.4

5 Mnożenie sumy algebraicznej przez jednomian

Na dobry początek ›

Dwie węgierskie turystki Laura i Emma podróżują po Polsce. Po górskiej wycieczce zamówiły w schronisku zupę pomidorową, żurek i porcję pierogów na spółkę.

Laura

Összeadtam mindegyik árat złotyban, az összeget pedig átszámoltam forintra:
$70 \cdot (3 + 4 + 8) = 1050$

Emma

Mindegyik árat átszámoltam złotyról forintra, azután pedig összeadtam:
$70 \cdot 3 + 70 \cdot 4 + 70 \cdot 8 = 1050$

Pytania i polecenia

Laura i Emma zastanawiają się, ile kosztował posiłek w przeliczeniu na forinty. Każda z nich wykonała obliczenia inną metodą, którą opisują słownie.

- Jeśli nie rozumiesz po węgiersku, domyśl się z obliczeń, na czym polegały te sposoby.
- Ile forintów kosztuje 1 zł?
- Ceny potraw i kurs forinta mogą się zmieniać. Zapisz obliczenia Laury i Emmy, jeśli zupa pomidorowa kosztuje x, żurek y, pierogi z, a 1 zł jest warty f forintów.

Odpowiedzi

- Laura najpierw zsumowała ceny zupy pomidorowej, żurku i pierogów w złotych, później przeliczyła wynik na forinty. Emma każdą z cen najpierw przeliczyła na forinty i dopiero dodała.
- 70 zł
- Laura: $f \cdot (x + y + z)$, Emma: $f \cdot x + f \cdot y + f \cdot z$

Uwagi metodyczne

Na realizację tematu przewidziano 3 godziny lekcyjne.

Użycie mało znanego języka węgierskiego w starterze zaintryguje uczniów, znacząco ich zaktywizuje i zmusi do znalezienia odpowiedzi na zadane tam pytania.

Złote myśli

Matematyka – to pewien język.

Josiah Willard Gibbs

UMIEJĘTNOŚCI

Uczeń już potrafi:

- dodawać jednomiany podobne (tzn. różniące się jedynie współczynnikiem liczbowym)
- dodawać i odejmować sumy algebraiczne z redukcją wyrazów podobnych

Uczeń będzie umiał:

- mnożyć sumy algebraiczne przez jednomian i dodawać wyrażenia powstałe z mnożenia sum algebraicznych przez jednomiany

Rozdział	IV (18 godzin)							V (16 godzin)						VI (13 godzin)					VII (11 godzin)				
Temat	1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	P	1	2	3	4	P	1	2	3	4	P
Godziny lekcyjne (razem 125)																							
Miesiące	II					III				IV				V					VI				
Semestr																							

W zrozumieniu procesu mnożenia sumy algebraicznej przez jednomian może pomóc nawiązanie do mnożenia dwóch liczb. W podanym przykładzie mnożenie w pamięci $9 \cdot 17$ ułatwiono, rozpisując 17 na $10 + 7$. Znajdą się jednak uczniowie, którzy uznają, że należy pomnożyć 17 przez 10 i odjąć 17, i nie dostrzegą potrzeby nawiązywania do mnożenia sumy liczb. Wtedy mamy kłopot, bo trzeba sięgać po inne wyjaśnienia. Dlatego najprostszą metodą jest pokazanie przykładu i wytrenowanie postępowania, co widzimy w przykładach 1. i 2. oraz serii kolejnych ćwiczeń.

Aby obliczyć w pamięci iloczyn $9 \cdot 17$, możemy postępować w sposób opisany poniżej.

- Liczbę 17 traktujemy jako sumę $10 + 7$.
- Mnożąc tę sumę przez 9, mnożymy każdy ze składników osobno.
- Dodajemy otrzymane iloczyny.

$$9 \cdot 17$$
$$9 \cdot (10 + 7)$$
$$9 \cdot 10 = 90 \quad \text{i} \quad 9 \cdot 7 = 63$$
$$90 + 63 = 153$$

Podobnie postępujemy, mnożąc sumę algebraiczną przez jednomian.

Zapamiętaj

Aby pomnożyć sumę algebraiczną przez jednomian, należy pomnożyć każdy wyraz sumy przez ten jednomian.

$$\blacksquare \cdot (\bullet + \blacktriangle) = \blacksquare \cdot \bullet + \blacksquare \cdot \blacktriangle$$

Na początku zajmiemy się przypadkiem, gdy jednomian jest po prostu liczbą.

Przykład 1

Wykonaj mnożenie jednomianu i sumy algebraicznej.

a) $3(2x+5) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot 5 = 6x + 15$ — Każdy wyraz w nawiasie mnożymy przez 3.

b) $(x+7) \cdot 4 = x \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 4x + 28$ — Każdy wyraz w nawiasie mnożymy przez 4.

c) $-4(x-2y) = -4 \cdot x + (-4) \cdot (-2y) = -4x + 8y$ — Każdy wyraz w nawiasie mnożymy przez –4.

d) $(-2a^2 + 8) \cdot (-2) = 4a^2 - 16$ — Każdy wyraz w nawiasie mnożymy przez –2.

Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie jednomianu i sumy algebraicznej.

a) $3 \cdot (2a+5)$ b) $(-3b+2) \cdot 5$ c) $(-4) \cdot (-c^3 + 2c^2)$ d) $(-12 + 8d) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$

Przykład 2

Wykonaj mnożenie lub dzielenie. Zredukuj wyrazy podobne, jeśli to możliwe.

a) $a^2 - 5(a - a^2) = a^2 - 5a + 5a^2 =$ — Każdy wyraz w nawiasie mnożymy przez –5.

$= 6a^2 - 5a$ — Redukujemy wyrazy podobne.

Odpowiedzi

Ćwiczenia 1. a) $6a + 15$ b) $-15b + 10$ c) $4c^3 - 8c^2$ d) $3 - 2d$

Dodatek do ćwiczenia 1.

Często uczniowie nie rozumieją, że minus przez literą oznacza to samo co minus przed liczbą. Zapisane niżej przykłady są kontynuacją ćwiczeń 1a) i b). Ich podobieństwo jest pozorne, ale przeanalizowanie, jak zmiana znaku wpływa na wynik działania, będzie dla ucznia cennym doświadczeniem.

I. $4(x + 3)$

II. $4(3 - x)$

III. $(3 + x) \cdot 2$

IV. $(3 - x) \cdot 2$

Analogicznie rozwińmy ćwiczenia 1c) i d).

V. $-2(2x + 3)$

VI. $-2(3 - 2x)$

Odpowiedzi

I. $4x + 12$ II. $12 - 4x$ III. $6 + 2x$ IV. $6 - 2x$

V. $-4x - 6$ VI. $-6 + 4x$

b) $3(a-2b)\cdot(-2) = -6(a-2b) =$
$= -6a + 12b$

Możemy najpierw pomnożyć liczby.

c) $(4a+6b):2 = 2a+3b$

Dzielenie wykonujemy analogicznie do mnożenia. Dzielimy każdy ze składników przez 2.

d) $\frac{6x+9}{3} = \frac{6x}{3} + \frac{9}{3} = 2x+3$

Dzielimy każdy ze składników przez 3.

Ćwiczenie 2

Wykonaj mnożenie lub dzielenie. Zredukuj wyrazy podobne, jeśli to możliwe.

a) $-4(b-2b^2+1)\cdot 2$ b) $(6c^3-3b^2+2):3$ c) $\frac{7\cdot(-2d+4)}{2}$

Przykład 3

Wykonaj mnożenie.

a) $x(y+3)$ b) $-2a(3a-b+1)$ c) $(5n+2p)(-3n)$

a) $x(y+3) = xy + x\cdot 3 = xy + 3x$

Każdy z dwóch składników sumy mnożymy przez x.

b) $-2a(3a-b+1) =$
$= -2a\cdot 3a + (-2a)\cdot(-b) + (-2a)\cdot 1 = -6a^2 + 2ab - 2a$

Każdy z trzech składników sumy mnożymy przez $(-2a)$.

c) $(5n+2p)(-3n) =$
$= 5n\cdot(-3n) + 2p\cdot(-3n) = -15n^2 - 6np$

Każdy z dwóch składników sumy mnożymy przez $-3n$.

Ćwiczenie 3.1

Wykonaj mnożenie.

a) $8x(6x+5)$ b) $3r(7r-8)$ c) $7x(6x+4y)$

Ćwiczenie 3.2

Przedstaw w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+3)\cdot x$ b) $(2a-4)\cdot(-a)$ c) $(a^2+b)\cdot a^2$ d) $(2p^2+3q^2)(-5p)$

Przykład 4

Uprość wyrażenie $ab(3a-b) - b(2a^2-a)$.

$ab(3a-b) - b(2a^2-a) =$ Wykonujemy mnożenie.

$= ab\cdot 3a - ab\cdot b - b\cdot 2a^2 + b\cdot a =$ Porządkujemy jednomiany.

$= \underline{3a^2b} - ab^2 \underline{- 2a^2b} + ab =$ Podkreślamy i redukujemy wyrazy podobne.

$= a^2b - ab^2 + ab$

203

Odpowiedzi

Ćwiczenia 2. a) $16b^2-8b-8$ **b)** $2c^3-b^2+\frac{2}{3}$ **c)** $-7d+14$ **3.1. a)** $48x^2+40x$ **b)** $21r^2-24r$ **c)** $42x^2+28xy$ **3.2. a)** x^2+3x **b)** $-2a^2+4a$ **c)** a^4+a^2b **d)** $-10p^3-15pq^2$

Przykłady i ćwiczenia służą treningowi, wspomagają zrozumienie procesu mnożenia sumy algebraicznej przez jednomian, ale mogą być dla uczniów nużące. Uatrakcyjnijmy im pracę – poprośmy o przygotowanie przykładów w grupach lub parach. Przy takich ćwiczeniach często powstają błędy wynikające z nieuwagi lub niedouczenia, więc każdy przykład autorstwa jednego ucznia powinien zostać sprawdzony przez innego ucznia. Konieczne jest zwracanie uwagi na „zapominających” mnożyć wszystkie składniki sumy. Temu m.in. służy wzajemne sprawdzanie poprawności wykonania zadania.

Uzasadnianie wzorów na pola i obwody wielokątów wskazuje na praktyczne zastosowanie wyrażeń algebraicznych i działań na tych wyrażeniach. Zachęćmy uczniów do uzasadniania innych wzorów geometrycznych.

Ćwiczenie 4

Uprość wyrażenie.

a) $x(x-2y^2+1)-2y(xy-3)$ b) $-3x(y-2x^2)-2xy(3+4y)-5x^3$

Przykład 5

Oblicz wartość wyrażenia $5a^2-5a(a-1)-(a-b)$ dla $a=\frac{3}{4}$ i $b=2$.

To zadanie można wykonać, podstawiając podane wartości a i b do wyrażenia. Jest to jednak bardzo pracochłonne, a duża liczba obliczeń zwiększa ryzyko pomyłki.

$5a^2-5a(a-1)-(a-b)=5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-5\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}-1\right)-\left(\frac{3}{4}-2\right)=$

$=5\cdot\frac{9}{16}-5\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-1\frac{1}{4}\right)=\frac{45}{16}+\frac{15}{16}+1\frac{1}{4}=\frac{60}{16}+1\frac{1}{4}=\frac{15}{4}+1\frac{1}{4}=3\frac{3}{4}+1\frac{1}{4}=5$

Łatwiej jest najpierw uprościć wyrażenie, a potem podstawić wartości zmiennych.

$5a^2-5a(a-1)-(a-b)=5a^2-5a^2+5a-a+b=4a+b$

Dla $a=\frac{3}{4}$ i $b=2$ wyrażenie $4a+b$ przyjmuje wartość: $4\cdot\frac{3}{4}+2=3+2=5$.

Ćwiczenie 5

Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $y(2x-3y)-(y^2-xy)-2y^2$ dla $x=-0{,}3$ i $y=1\frac{2}{3}$

b) $2x^2-x(x-y)+y(x-3)$ dla $x=\frac{1}{2}$ i $y=-2{,}5$

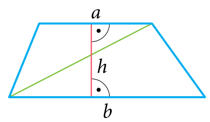
Zastosowania w geometrii

Przykład 6

Uzasadnij wzór na pole trapezu, korzystając ze wzoru na pole trójkąta.

Chcemy pokazać, że pole trapezu o podstawach a i b oraz wysokości h można obliczyć, korzystając ze wzoru $P=\frac{1}{2}(a+b)h$.

Dowolna przekątna trapezu dzieli go na dwa trójkąty, każdy o wysokości h – jak na rysunku obok. Jeden z tych trójkątów ma podstawę a, drugi b. Pole trapezu jest równe sumie pól tych trójkątów.



$P=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$, czyli $P=\frac{1}{2}h\cdot a+\frac{1}{2}h\cdot b$

Zauważmy, że takie samo wyrażenie otrzymalibyśmy, mnożąc sumę $(a+b)$ przez jednomian $\frac{1}{2}h$.

$\frac{1}{2}h(a+b)=\frac{1}{2}h\cdot a+\frac{1}{2}h\cdot b$

Zatem pole trapezu jest równe $P=\frac{1}{2}h\cdot a+\frac{1}{2}h\cdot b=\frac{1}{2}h(a+b)=\frac{1}{2}(a+b)h$, co chcieliśmy uzasadnić.

Odpowiedzi

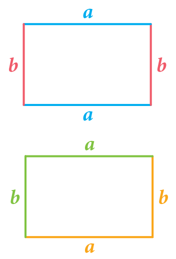
Ćwiczenia 4. a) x^2-4xy^2+x+6y **b)** x^3-8xy^2-9xy **5.** a) $-18\frac{1}{6}$ **b)** $5\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 6

Obwód prostokąta o bokach a i b możemy obliczyć na dwa sposoby:

- mnożymy długość boku a przez 2 (bo są dwa boki o takiej długości), podobnie postępujemy z bokiem b, potem dodajemy otrzymane iloczyny,
- dodajemy a i b, otrzymujemy w ten sposób długość „naroża", którą następnie mnożymy przez 2.

Zapisz wyrażenia odpowiadające tym sposobom, a następnie uzasadnij, że są one równe.



Z. ĆWICZEŃ
1–3
4–6

ZB. ZADAŃ
1–8
9–17
18–26

Zadania

1. Wykonaj polecenia. ▶ Jeśli poprawnie rozwiążesz dwa kolejne przykłady z jednego poziomu, możesz przejść na następny poziom.

poziom A ← P1 Pomnóż sumę algebraiczną przez liczbę.

a) $3\cdot(ab+2a)$ c) $(-3d+8)\cdot 4$ e) $9\cdot(mn-2m)$ g) $(2cd-3)\cdot 8$

b) $(x-5)\cdot 2$ d) $5\cdot(y^2+y)$ f) $\left(\frac{1}{3}k-1\right)\cdot 6$ h) $7\cdot(g^3h^2+1)$

poziom B ← P1 Pomnóż sumę algebraiczną przez liczbę.

a) $(xy+y)\cdot(-2)$ c) $-3\cdot(x+7)$ e) $(-c+2)\cdot(-8)$ g) $-9\cdot(2kn+n)$

b) $-4\cdot(a-3)$ d) $(m^2-2m)\cdot(-6)$ f) $-5\cdot(-4x-1)$ h) $(3d-9)\cdot(-1)$

poziom C ← P2 Uprość wyrażenie.

a) $5x-2(x^2+3x-1)$ e) $(8-4k^2+2m^3):4$

b) $\frac{3\cdot(-10z+5)}{5}$ f) $-8\cdot(x-2y^2+z):2$

c) $-3\cdot(2a^2-b+3)\cdot 2$ g) $\frac{2\cdot(-3+6p)}{3}$

d) $6cd-2(-c^2+3d-5)$ h) $-\frac{3}{4}\cdot(4t^3-6s^2+2w)\cdot 4$

poziom D ← P3 Wykonaj mnożenie.

a) $p(p-9)p^2$ d) $(2v-6v^2)\cdot 5v^3$ g) $(9-2w)\cdot(-3w)$

b) $q^2(2q+3)p$ e) $-3p^3\left(\frac{1}{9}p+\frac{1}{6}p^2\right)$ h) $-u(u^2+1)\cdot 2u^2$

c) $ab(a-2b)$ f) $u^2v(2u^2+uv)$ i) $ab^2(a^2+b)\cdot b^3$

poziom E ← P4 Opuść nawiasy, a następnie zredukuj wyrazy podobne.

a) $2(x-8)-3(y-2x^2)$ d) $3(x^2-2xy+2y^2)-(3x^2-4xy-y^2)$

b) $5(x-4)-2(3x^2-5x^3)$ e) $(6m-2mn+n)-4(1{,}5m-3n)$

c) $-6x-(3x-y)+4(-2x+y)$ f) $-6\left(\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{2}a+2\right)-4(0{,}75a-0{,}5a^2)$

Zadań utrwalających jest sporo; warto dopilnować, aby uczniowie wykonali ich jak najwięcej. Uzyskanie sprawności obliczania i natychmiastowego „widzenia" wyniku jest bardzo wskazane. Można to porównać do treningu sportowego – im więcej trenujesz, tym lepsze osiągasz wyniki.

Zadanie z kluczem

Poziomy:
A – mnożenie sumy algebraicznej przez liczbę dodatnią,
B – mnożenie sumy algebraicznej przez liczbę ujemną,
C – mnożenie sumy przez liczbę, a następnie redukcja wyrazów podobnych,
D – mnożenie sumy przez jednomian (lub jednomiany),
E – jak C, ale bardziej złożone rachunkowo.

Odpowiedzi

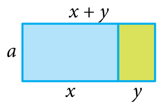
Ćwiczenia 6. $2a+2b=2(a+b)$ **Zadania** 1. poziom A a) $3ab+6a$ b) $2x-10$ c) $-12d+32$ d) $5y^2+5y$ e) $9mn-18m$ f) $2k-6$ g) $16cd-24$ h) $7g^3h^2+7$ poziom B a) $-2xy-2y$ b) $-4a+12$ c) $-3x-21$ d) $-6m^2+12m$ e) $8c-16$ f) $20x+5$ g) $-18kn-9n$ h) $-3d+9$ poziom C a) $-2x^2-x+2$ b) $-6z+3$ c) $-12a^2+6b-18$ d) $2c^2+6cd-6d+10$ e) $\frac{1}{2}m^3-k^2+2$ f) $8y^2-4x-4z$ g) $4p-2$ h) $-12t^3+18s^2-6w$ poziom D a) p^4-9p^3 b) $2pq^3+3pq^2$ c) a^2b-2ab^2 d) $10v^4-30v^5$ e) $-\frac{1}{3}p^4-\frac{1}{2}p^5$ f) $2u^4v+u^3v^2$ g) $6w^2-27w$ h) $-2u^5-2u^3$ i) $a^3b^5+ab^6$ poziom E a) $6x^2+2x-3y-16$ b) $10x^3-6x^2+5x-20$ c) $-17x+5y$ d) $7y^2-2xy$ e) $13n-2mn$ f) -12

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE | Rozdział IV

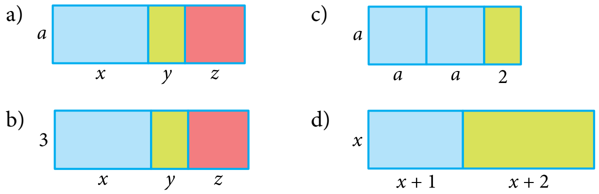
2. Dwóch pracowników sklepu internetowego pakuje paczki do wysyłki. Jeden z nich pakuje x paczek na godzinę, a drugi y paczek na godzinę. Ile paczek spakują razem przez 8 godzin?

Zapisz odpowiednie wyrażenie na dwa sposoby:
I. najpierw oblicz, ile paczek spakuje każdy z nich w ciągu 8 godzin,
II. najpierw oblicz, ile paczek spakują razem w ciągu godziny.
Sprawdź, czy otrzymane wyrażenia są równe.

3. Sytuację przedstawioną na rysunku można opisać za pomocą wzoru $a(x+y)=ax+ay$, co oznacza, że pole prostokąta o bokach długości a i $x+y$ jest równe sumie pól prostokątów o bokach a i x oraz a i y.



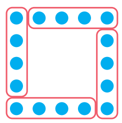
Wyraź za pomocą wzoru oraz opisu słownego sytuację przedstawioną na rysunku.

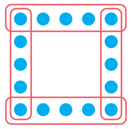


4. Ola wymyśliła sztuczkę magiczną:
Pomyśl jakąś liczbę. Dodaj do niej 8. Wynik pomnóż przez 2. Odejmij 10. Oblicz połowę z wyniku. Odejmij liczbę, którą pomyślałeś na początku. Teraz zgadnę! Wyszło ci 3.
Uzasadnij za pomocą wyrażeń algebraicznych, że zawsze otrzymamy liczbę 3.

5. Wzdłuż brzegu kwadratu rysujemy kropki – po n przy każdym boku. Na rysunkach przedstawiono tę sytuację dla $n = 5$. Liczbę kropek można wyznaczyć na wiele sposobów. Na rysunkach pokazano dwa z nich.

Na każdym boku zliczamy $n - 1$ kropek.





Na każdym boku zliczamy n kropek, ale kropki w rogach policzyliśmy 2 razy, więc trzeba każdą z nich odjąć jeden raz.

a) Wymyśl jeszcze dwa sposoby liczenia.
b) Zapisz wyrażenia odpowiadające tym czterem sposobom liczenia, a następnie uzasadnij, że te wyrażenia są równe.

Odpowiedzi

Zadania 2. $8x + 8y = 8(x + y)$ **3. a)** $a(x + y + z) = ax + ay + az$
b) $3(x + y + z) = 3x + 3y + 3z$ **c)** $a(a + a + 2) = a^2 + a^2 + 2a$
d) $x\big((x+1)+(x+2)\big) = x(x + 1) + x(x + 2)$
4. $\frac{1}{2}\big((x+8)\cdot 2 - 10\big) - x = 3$

6. Poniżej podane są cztery zestawy wyrażeń algebraicznych. Dobierzcie się w trójki. Niech każda osoba w trójce wybierze inne wyrażenie z zestawu I, wykona mnożenie i zredukuje wyrazy podobne. Następnie sprawdźcie, czy otrzymaliście jednakowe wyniki. Jeśli nie – poszukajcie błędu. To samo zróbcie w pozostałych zestawach.

I. $n^2-3n(n+2)$
$-5n(-2n+3)-3n(4n-3)$
$-4n(n-2m+3)-2n(-n+3m-5)-2n(m+2)$

II. $x^2+4x(3y-x)+6y(y-2x)$
$2x(y-1{,}5x)-3y\left(-2y+\frac{2}{3}x\right)$
$-x\left(3y^2-4\frac{1}{2}x\right)+\left(5x^2-3y^2\right)\cdot(-1{,}5)-3y\left(-xy-\frac{1}{2}y\right)$

III. $-3a^2+2a(a-4)$
$a(3-a)-2{,}75(4a-3)-8\frac{1}{4}$
$(3a^2-4ab)\cdot(-5)-4b(2a-ab)-2a(4-7a+6b+2b^2)$

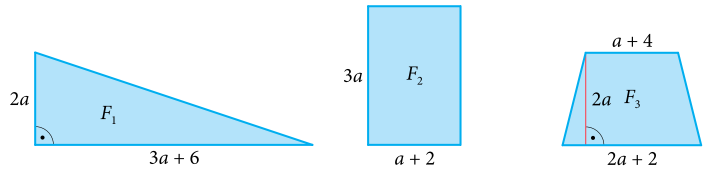
IV. $p(4p-5s)-s(-5p+2s)$
$2p(2p-s)-s(p-s)\cdot(-2)$
$\frac{2}{3}p(6p-2s+4)-\frac{1}{6}s(1+12s-8p)-\frac{1}{3}\left(8p-\frac{1}{2}s\right)$

7. Uzasadnij, że:

a) wartość wyrażenia $3(x-2y)+2(y^2-x+1)-2y(y-3)$ nie zależy od wartości zmiennej y,

b) wartość wyrażenia $6y^2-4y(2x-1)+2y(-2y+x-4)+2x-2x(1-3y)$ nie zależy od wartości zmiennej x.

8. Sprawdź, czy pola figur F_1, F_2, F_3 są równe.



trójkąt prostokątny   prostokąt   trapez

9. Wyznacz jednomian, przez który należy pomnożyć sumę algebraiczną $3x-2xy+4y^2$, aby otrzymać podane wyrażenie.

a) $6x^2-4x^2y+8xy^2$
b) $1{,}5x^2y-x^2y^2+2xy^3$
c) $15xy^2-10xy^3+20y^4$
d) $4{,}5x^3y-3x^3y^2+6x^2y^3$

Dodatek do zadania 8.

1. Oblicz pola trójkąta o podstawie $12a+24b$ i wysokości 4 oraz prostokąta o bokach $6a+12b$ oraz 6, gdzie $a, b>0$. Która z tych figur ma większe pole?

2. Jak w prostokącie z zadania 8.1. zmienić bok o długości 6, aby pola obu figur były jednakowe?

Odpowiedzi

1. Trójkąt: $24(a+2b)$, prostokąt: $36(a+2b)$; większe jest pole prostokąta.

2. Należy skrócić go o 2.

Odpowiedzi

Zadania 6. I. $-2n^2-6n$ II. $-3x^2+6y^2$ III. $-a^2-8a$ IV. $4p^2-2s^2$
8. $P_1=P_2=P_3=3a^2+6a$ **9. a)** $2x$ **b)** $\frac{1}{2}xy$ **c)** $5y^2$ **d)** $1{,}5x^2y$

Rozwiązania

7. a) $3(x-2y)+2(y^2-x+1)-2y(y-3)=$
$=3x-6y+2y^2-2x+2-2y^2+6y=x+2$

b) $6y^2-4y(2x-1)+2y(-2y+x-4)+2x-2x(1-3y)=$
$=6y^2-8xy+4y-4y^2+2xy-8y+2x-2x+6xy=$
$=2y^2-4y$

9. a) Zauważmy, że $3x\cdot 2x=6x^2$, ponadto: $(-2xy)\cdot 2x=-4x^2y$ oraz $4y^2\cdot 2x=8xy^2$; zatem szukanym jednomianem jest $2x$.

Uczniowie w grupach rozwiązują zadania podobne do przykładu zamieszczonego niżej.

W miejsce ? wstaw takie jednomiany, aby otrzymać równość.

a) $z(? + ?) = 4xyz + az$

b) $5a(? - ?) + 6x(? - ?) = 15ax - 10ay + 12x^2 - 18xy$

c) $3x(? + y) - ?(x - y) = 3x^2 - 2xy + 5y^2$

Odpowiedzi

a) $4xy$; a **b)** $3x$; $2y$; $2x$; $3y$ **c)** x; $5y$

Następnie uczniowie w parach układają po pięć podobnych przykładów i przekazują je innym parom do rozwiązania.

10. Jakie liczby można wpisać w miejsce ? w wyrażeniu

$$?(3x - 2) + ?(3 - 2y),$$

aby po wykonaniu mnożenia i redukcji wyrazów podobnych otrzymać wyrażenie $9x - 4y$?

Dla dociekliwych

Umiesz już wykonać mnożenie: $4(x + y) = 4x + 4y$.
Zdarzają się sytuacje, w których warto skorzystać z tej równości w drugą stronę, tzn. zamienić $4x + 4y$ na $4(x + y)$. Taką operację nazywamy „wyłączaniem wspólnego czynnika przed nawias". Czasami jest to bardzo łatwe, czasami zaś trzeba się dłużej zastanowić, jaki czynnik możemy wyłączyć. Na przykład:

- $2a - 2b = 2(a - b)$
- $2a - 10b = 2a - 2 \cdot 5b = 2(a - 5b)$
- $2a^2 + 9ab = a(2a + 9b)$

1. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

a) $8ab - 6ab^2$ c) $35xy^3 + 56y$

b) $4x^3 - 2x^2 + 2x$ d) $\frac{1}{121}k^2l - \frac{1}{15}k^3l^4$

2. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias i oblicz.

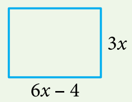
a) $7 \cdot 3{,}5 + 3 \cdot 3{,}5$

b) $12{,}125 \cdot 6{,}78 + 6{,}78 \cdot 7{,}875$

c) $524 \cdot 1432 + 1512 \cdot 1432 - 36 \cdot 1432$

Czy już umiem?

I. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące pole przedstawionego obok prostokąta, a następnie wykonaj mnożenie.



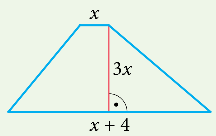
II. Wykonaj mnożenie.

a) $x(5x^2 - x)$ b) $-x(5x^2 - x)$ c) $-x(-5x^2 - x)$

III. Opuść nawiasy, a następnie zredukuj wyrazy podobne.

a) $ab(b - a^2) - (ab - a^3 + b) \cdot b$ b) $-0{,}3a\left(a - 3\frac{1}{3}\right) + 0{,}3a^2$

IV. Które z wyrażeń **nie opisuje** pola narysowanego trapezu?



A. $3x(x + 2)$ C. $\frac{3}{2}x(2x + 4)$

B. $\frac{1}{2}(6x^2 + 12x)$ D. $\frac{1}{2}x(3x + 6)$

Odpowiedzi

Dla dociekliwych **1. a)** $2ab(4 - 3b)$ **b)** $2x(2x^2 - x + 1)$ **c)** $7y(5xy^2 + 8)$ **d)** $k^2l\left(\frac{1}{121} - \frac{1}{15}kl^3\right)$ **2. a)** $3{,}5 \cdot (7 + 3) = 35$ **b)** $6{,}78 \cdot (12{,}125 + 7{,}875) = 135{,}6$ **c)** $1432 \cdot (524 + 1512 - 36) = 2\,864\,000$

Czy już umiem? **I.** $3x(6x - 4) = 18x^2 - 12x$ **II. a)** $5x^3 - x^2$ **b)** $-5x^3 + x^2$ **c)** $5x^3 + x^2$ **III. a)** $-b^2$ **b)** a **IV.** D

Rozwiązania

10. $3 \cdot (3x - 2) + 2 \cdot (3 - 2y) = 9x - 6 + 6 - 4y = 9x - 4y$

dlanauczyciela.pl | Kartkówka IV.5

6 Wyrażenia algebraiczne i procenty

Na dobry początek ›

Cechą charakterystyczną wód morskich jest ich zasolenie. Określa ono, ile gramów soli mineralnych jest zawartych w 1 kg wody morskiej.

Pytania i polecenia

- Ile gramów soli znajduje się średnio w 1 kilogramie wody w Bałtyku?
- Ile średnio soli wytrąci się po odparowaniu 1 kilograma wody z Morza Martwego? Ile kilogramów wody z Bałtyku potrzeba, aby po odparowaniu uzyskać taką samą ilość soli?

Odpowiedzi

- W 1 kg wody z Bałtyku znajduje się średnio 7,5 g soli.
- Po odparowaniu czystej wody z 1 kg wody z Morza Martwego otrzymamy 270 g soli. Aby otrzymać tyle soli po odparowaniu czystej wody z wody bałtyckiej, należy wziąć jej 36 l.

Uwagi metodyczne

Na realizację tematu przewidziano 3 godziny lekcyjne.

Poprzednie tematy wprowadziły uczniów w świat wyrażeń algebraicznych i przybliżyły im różne metody posługiwania się tymi wyrażeniami oraz ich zapisywania. Jednym słowem lekcje polegały na nauce języka, na treningu. Teraz uczniowie poznają przykłady zastosowania zdobytych umiejętności w obliczeniach procentowych. Obliczenia procentowe są odpowiednią płaszczyzną do pokazywania zastosowań wyrażeń algebraicznych. Uczniowie mają okazję powtórzenia i utrwalenia ważnych umiejętności dotyczących procentów oraz stosowania wyrażeń algebraicznych w sytuacjach praktycznych. Ciekawy wstęp, z wieloma informacjami, można wykorzystać do poszerzenia tych wiadomości, co może być podstawą własnych projektów uczniów. Warto bez pośpiechu przeanalizować z nimi rozwiązane przykłady i sprawdzić, czy na pewno wiedzą, czym są wyrażenia algebraiczne, umieją je zapisywać i rozumieją zasadność wykonywanych działań.

UMIEJĘTNOŚCI

Uczeń już potrafi:

- obliczać wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych
- zapisywać zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych
- zapisywać rozwiązania zadań w postaci wyrażeń algebraicznych
- dodawać i odejmować sumy algebraiczne z redukcją wyrazów podobnych
- mnożyć sumy algebraiczne przez jednomian i dodawać wyrażenia powstałe z mnożenia sum algebraicznych przez jednomiany

Uczeń będzie umiał:

- stosować wyrażenia algebraiczne w obliczeniach procentowych

Rozdział	IV (18 godzin)							V (16 godzin)						VI (13 godzin)					VII (11 godzin)				
Temat	1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	P	1	2	3	4	P	1	2	3	4	P
Godziny lekcyjne (razem 125)																							
Miesiące			II				III					IV				V						VI	
Semestr																							

Stosowanie wyrażeń algebraicznych ułatwia rozwiązywanie wielu zadań dotyczących procentów. Aby z tego skorzystać, nauczymy się zapisywać wyrażenia algebraiczne z użyciem procentów.

Przykład 1

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:

a) 65% liczby x,
b) 120% wartości wyrażenia ab,
c) 40% wartości wyrażenia $0{,}6m$.

a) 65% liczby x to inaczej $\frac{65}{100}$ tej liczby, czyli $\frac{65}{100}x$ lub $0{,}65x$.
b) 120% wartości wyrażenia ab to inaczej $1{,}2ab$.
c) 40% wartości wyrażenia $0{,}6m$ to inaczej $0{,}4 \cdot (0{,}6m) = 0{,}4 \cdot 0{,}6m = 0{,}24m$.

Ćwiczenie 1

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:
40% liczby a, 60% wartości wyrażenia xy, 180% wartości wyrażenia $0{,}3u$.

Procent procentu

Przykład 2

W klasach siódmych pewnej szkoły jest 40% chłopców i 60% dziewcząt. Na kółko matematyczne chodzi 20% chłopców i 30% dziewcząt. Jaki procent siódmoklasistów chodzi na kółko?

Wprowadzamy oznaczenie:
x – liczba osób w klasach siódmych.
Chłopcy stanowią 40%, czyli 0,4 tej liczby:
$0{,}4x$ – liczba chłopców w klasach siódmych.
20% tej liczby, czyli 0,2 tej liczby, chodzi na kółko.
Zapisujemy wyrażenie podobnie jak w przykładzie 1c.
$0{,}2 \cdot 0{,}4x = 0{,}08x$ – liczba chłopców chodzących na kółko
Analogicznie postępujemy w przypadku dziewcząt.
$0{,}6x$ – liczba dziewcząt w klasach siódmych
$0{,}3 \cdot 0{,}6x = 0{,}18x$ – liczba dziewcząt chodzących na kółko
W sumie na kółko matematyczne chodzi:
$0{,}08x + 0{,}18x = 0{,}26x$, czyli 26% wszystkich siódmoklasistów.

W rozdziale „Procenty” rozwiązywaliśmy podobne zadania, jednak wtedy podana była liczba osób stanowiąca 100%. Teraz nie znamy tej liczby. Dlatego skorzystamy z wyrażeń algebraicznych.

Ćwiczenie 2

Spośród wszystkich uczniów szkoły 15% stanowią siódmoklasiści, a 20% siódmoklasistów to klasa 7a. Jaki procent uczniów szkoły stanowią uczniowie 7a?

Odpowiedzi

Ćwiczenia **1.** $0{,}4a$, $0{,}6xy$, $0{,}54u$ **2.** 3%

Przykład 3

Oprocentowanie rocznej lokaty (zob. s. 72) wynosi 2%, a podatek od odsetek 19%. O ile procent wzrośnie kwota na rachunku lokaty po upływie roku?

Sposób I

x – wpłacona kwota

$0{,}02x$ – kwota odsetek po roku

$0{,}19 \cdot 0{,}02x = 0{,}0038x$ – kwota podatku od odsetek

$x + 0{,}02x - 0{,}0038x = 1{,}0162x$ – kwota na rachunku lokaty po roku

$1{,}0162x$ to $101{,}62\%x$, czyli kwota na rachunku lokaty po roku jest wyższa od wpłaconej o 1,62%.

Sposób II

x – wpłacona kwota

$0{,}02x$ – kwota odsetek po roku

Skoro podatek stanowi 19% odsetek, to na rachunku dopisane zostanie pozostałe 81% odsetek, czyli:

$0{,}81 \cdot 0{,}02x = 0{,}0162x$.

Kwota na rachunku lokaty wzrośnie o 0,0162 wpłaconej kwoty, czyli o jej 1,62%.

Ćwiczenie 3

Antosia planowała zakupy: 40% pieniędzy zamierzała wydać na płyty, a 60% na książki. Okazało się, że w sklepie jest promocja – ceny wszystkich płyt obniżono o 10%. O ile procent mniej zapłaci Antosia za całe zakupy, jeśli kupi to, co planowała?

O ile procent mniej, o ile procent więcej

Przypomnijmy, że gdy chcemy znaleźć liczbę większą lub mniejszą o określony procent od danej liczby, najwygodniej jest wykonać odpowiednie mnożenie. Podobnie zapisujemy zmiany o określony procent w przypadku wyrażeń algebraicznych.

Przykład 4

a) W lesie rośnie 180 dębów i o 30% więcej buków. Ile jest buków?
b) W lesie rośnie 180 dębów i o 30% mniej olch. Ile jest olch?
c) Zapisz wyrażenie oznaczające liczbę o 30% większą niż x.
d) Zapisz wyrażenie oznaczające liczbę o 30% mniejszą niż x.

a) Liczba buków stanowi 130% liczby dębów, czyli jest ich: $\frac{130}{100} \cdot 180 = 1{,}3 \cdot 180 = 234$.
b) Liczba olch stanowi $100\% - 30\% = 70\%$ liczby dębów, czyli jest ich: $\frac{70}{100} \cdot 180 = 0{,}7 \cdot 180 = 126$.
c) Liczba o 30% większa niż x to 130% liczby x, czyli $1{,}3x$.
d) Liczba o 30% mniejsza niż x to 70% liczby x, czyli $0{,}7x$.

Odpowiedzi

Ćwiczenia 3. o 4% mniej

Warto zajrzeć na strony w podręczniku dotyczące obliczeń procentowych, aby uczniowie zobaczyli, jak zmienia się metoda rozwiązywania zadań (np. „O ile procent więcej, o ile mniej”), jeśli korzysta się z wyrażeń algebraicznych.

Prześledźmy zamieszczone niżej rozwiązanie zadania.

Wersja 1.
Biblioteka szkolna zamierza zakupić 4 egzemplarze słownika. Na ten cel otrzymała dotację. Okazało się jednak, że księgarnia udzieliła szkole rabatu – cena słownika została obniżona o 20%. Czy po tej obniżce biblioteka może kupić więcej egzemplarzy słownika? O ile więcej? Dlaczego?

Wersja 2.
Biblioteka szkolna otrzymała dotację na zakup 8 egzemplarzy słownika, ale kupiła 20 egzemplarzy, bo księgarnia udzieliła szkole rabatu. Ile procent wynosił rabat?

Rozwiązania algebraiczne

Wersja 1.
x – cena egzemplarza słownika przed obniżką,
$4x$ – zaplanowany koszt zakupu słowników,
$0{,}8x$ – cena słownika po obniżce,
$4 \cdot 0{,}8x = 3{,}2x$ – koszt zakupu 4 egzemplarzy po obniżce,
$5 \cdot 0{,}8x = 4x$ – koszt zakupu 5 egzemplarzy po obniżce, jednocześnie zaplanowany koszt słowników.
Po obniżce za tę samą kwotę można kupić o 1 egzemplarz słownika więcej.

Wersja 2.
s – cena egzemplarza słownika bez rabatu,
$8s$ – koszt zakupu 8 egzemplarzy bez rabatu,
$x \cdot s$ – cena egzemplarza słownika z rabatem.
$8s = 20xs$, a więc $xs\frac{8}{20} = \frac{4}{10}s = 40\%s$.
Cena egzemplarza słownika po udzieleniu rabatu stanowi 40% ceny początkowej, rabat wyniósł więc 60%.

Jak widać, umiejętność zapisywania wyrażeń algebraicznych może pomóc w rozwiązywaniu dość trudnych zadań. Pozwólmy uczniom wyposażonym w nowe narzędzia zmierzyć się z takimi problemami podczas pracy w grupach. Nie pokazujmy im gotowych rozwiązań.

Zadania utrwalające przyzwyczajają uczniów do zapisywania rozwiązań w postaci wyrażeń algebraicznych i wskazują im korzyści ze stosowania tego sposobu pracy. W ramach dodatkowych ćwiczeń warto wykonać zadanie 2., przyjmując za x wielkości występujące w konkretnych sytuacjach.
Warto też wrócić do zadań, które uczniowie rozwiązywali wcześniej, nie znając jeszcze wyrażeń algebraicznych. Spojrzenie wstecz i próba rozwiązania problemów, kiedyś niełatwych, a teraz – dzięki umiejętności posługiwania się algebrą – prostych i zrozumiałych, przynosi pozytywne efekty dydaktyczne. Nowe narzędzia pozwalają uczniom łatwiej rozwiązywać trudne problemy, dzięki czemu zaczynają oni widzieć sens w tym, aby się ich nauczyć.
Rozważmy kolejne zadanie. Przed poznaniem wyrażeń algebraicznych to zadanie dla większości uczniów byłoby nie do rozwiązania.

Dodatkowe zadanie

Cenę laptopów zmieniano dwukrotnie. Najpierw obniżono ją o 20%, a następnie podwyższono o 10%. Czy cena po obu zmianach byłaby taka sama, gdyby najpierw cenę podwyższono o 10%, a następnie obniżono o 20%? Dlaczego?

Rozwiązanie algebraiczne

x – cena laptopa przed zmianami,
$1{,}1 \cdot 0{,}8x$ – cena po obniżce o 20%, podwyższona o 10%,
$0{,}8 \cdot 1{,}1x$ – cena po podwyżce o 10%, obniżona o 20%.

Spytajmy uczniów, czy zapis zmian cen za pomocą wyrażeń algebraicznych w jednym i drugim przypadku ułatwia rozwiązanie.

Ćwiczenie 4.1

Oblicz za pomocą jednego mnożenia:
a) liczbę o 20% większą od 80, b) liczbę o 20% mniejszą od 80.

Ćwiczenie 4.2

Zapisz wyrażenie oznaczające liczbę:
a) o 20% większą od y, b) o 45% mniejszą od x, c) o 13% większą od $0{,}8x$.

Przykład 5

Cena została podniesiona o 20%, a następnie zmniejszona o 10%. O ile procent wyższa jest obecna cena od ceny początkowej?
Nie znamy początkowej ceny, możemy ją jednak oznaczyć literą x. Po podwyżce cena wzrosła do $1{,}2x$, a po obniżce wynosiła:
$0{,}9 \cdot (1{,}2x) = 0{,}9 \cdot 1{,}2x = 1{,}08x$.
$1{,}08x$ to $108\%x$, czyli cena x wzrosła o 8%.

Z. ĆWICZEŃ 1–4 5–8

Ćwiczenie 5

O ile procent zmniejszyła się cena, jeśli najpierw obniżono ją o 10%, a później jeszcze o 20%?

Zadania

ZB. ZADAŃ 1–12 13–23 24–34

1. Zapisz:
a) działanie pozwalające obliczyć 13% liczby 837,
b) 13% liczby x,
c) działanie pozwalające obliczyć liczbę o 17% większą od 921,
d) liczbę o 17% większą od x,
e) działanie pozwalające obliczyć liczbę o 15% mniejszą od 739,
f) liczbę o 15% mniejszą od x.

2. Zapisz:
a) 80% liczby x,
b) 70% liczby $0{,}8x$,
c) 70% z 80% liczby x,
d) liczbę o 10% większą od x,
e) liczbę o 20% większą od $1{,}1x$,
f) liczbę o 20% większą od liczby o 20% większej od x.

3. W wyborach do samorządu szkolnego głosy oddało 60% uczniów szkoły. Najwięcej głosów zyskał kandydat, którego poparło 40% głosujących. Ile procent uczniów tej szkoły głosowało na tego kandydata?

4. W całkowitym koszcie wycieczki noclegi stanowią 25%, a wyżywienie 35%. Właściciel pensjonatu zaproponował nocleg w pokojach o 15% droższych, zachęcając rabatem na wyżywienie w wysokości 20%. Czy opłaca się przyjąć taką ofertę?

Odpowiedzi

Ćwiczenia **4.1. a)** 96 **b)** 64 **4.2. a)** $1{,}2y$ **b)** $0{,}55x$ **c)** $0{,}904x$ **5.** o 28%
Zadania **1. a)** $0{,}13 \cdot 837$ **b)** $0{,}13x$ **c)** $1{,}17 \cdot 921$ **d)** $1{,}17x$ **e)** $0{,}85 \cdot 739$ **f)** $0{,}85x$
2. a) $0{,}8x$ **b)** $0{,}7 \cdot 0{,}8x$ **c)** $0{,}7 \cdot 0{,}8x$ **d)** $1{,}1x$ **e)** $1{,}2 \cdot 1{,}1x$ **f)** $1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot x$ **3.** 24% **4.** tak

5. Uczniowie z Kłodzka pojechali do zoo w mieście Dvůr Králové. Ponieważ 40% kosztów wycieczki trzeba było zapłacić w koronach czeskich, a kurs korony spadł z 16 gr do 14 gr, wycieczka była tańsza niż planowano. O ile procent zmniejszył się jej koszt?

6. O jaki procent zmieniła się cena kalafiora, jeśli:
a) obniżono ją dwukrotnie o 10%, b) podwyższono ją dwukrotnie o 10%?

7. Oblicz, o ile procent zmieniła się cena gry planszowej, jeśli jej cenę:
a) najpierw obniżono o 10%, a następnie podwyższono o 10%,
b) najpierw obniżono o 40%, a następnie podwyższono o 50%,
c) najpierw podwyższono o 40%, a następnie obniżono o 50%.

8. W prostokącie o bokach a i $2a$ dłuższy bok wydłużono o 20%, a krótszy skrócono o 20%.
a) Czy pole tak zmienionego prostokąta zmniejszyło się, czy zwiększyło? O ile procent?
b) Czy obwód tak zmienionego prostokąta zmniejszył się, czy zwiększył? O ile procent?

9. Kilka towarów objęto jednakową stawką VAT. Mamy obliczyć koszt zakupu tych towarów. Uzasadnij, że nie ma znaczenia, czy:
- najpierw dodamy ceny netto, a potem doliczymy VAT do ich sumy,
- najpierw obliczymy ceny brutto poszczególnych towarów, a potem je zsumujemy.

Dla dociekliwych

1. Cenę pewnego towaru podniesiono o 25%. O ile procent należy ją obniżyć, aby wróciła do poprzedniego poziomu? Spróbuj to obliczyć (pamiętaj, że nie znamy konkretnej ceny!), a jeśli ci się nie uda, przeczytaj wskazówkę.

Wskazówka. Oznaczmy początkową cenę literą x. Po podwyżce cena wzrośnie do $1{,}25x$. Trzeba ją teraz obniżyć o $0{,}25x$. Jaki procent nowej ceny (czyli $1{,}25x$) stanowi kwota obniżki (czyli $0{,}25x$)?

2. Podatek VAT na nabiał stanowi 5% jego ceny netto (zob. s. 90). Jaki procent ceny brutto stanowi ten podatek?

Czy już umiem?

I. Zapisz liczbę:
a) o 40% większą niż 75% liczby x, b) o 10% mniejszą niż 80% liczby x.

II. Ciasta na Święto Szkoły upiekło 8% dziewcząt i 12% chłopców. Jaki to procent uczniów, jeśli chłopcy stanowią 45% wszystkich uczniów tej szkoły?

III. Cena zabawki zwiększyła się przed Bożym Narodzeniem o 30%, a po świętach obniżono ją o 20%. O ile procent droższa jest zabawka po tych dwóch zmianach?

Odpowiedzi

Zadania 5. o 5% **6. a)** o 19% **b)** o 21% **7. a)** Cena zmniejszyła się o 1%. **b)** Cena zmniejszyła się o 10%. **c)** Cena zmniejszyła się o 30%. **8. a)** Pole zmniejszyło się o 4%. **b)** Obwód zwiększył się o $6\frac{2}{3}$%.

Dla dociekliwych 1. o 20% 2. ok. 4,8%

Czy już umiem? I. **a)** $1{,}05x$ **b)** $0{,}72x$ **II.** 9,8% **III.** o 4%

Rozwiązania

8. Przed zmianą: $P = a \cdot 2a = 2a^2$, $L = 2(a + 2a) = 6a$.
Po zmianie: boki $0{,}8a$ i $2{,}4a$.
a) Pole po zmianie: $0{,}8a \cdot 2{,}4a = 1{,}92a^2 = 0{,}96 \cdot 2a^2 = 0{,}96P$.
Pole zmniejszyło się o 4%.
b) Obwód po zmianie: $2(0{,}8a + 2{,}4a) = 6{,}4a = 1\frac{1}{15} \cdot L$.
Obwód zwiększył się o $6\frac{2}{3}$%.

9. Dodanie VAT do ceny netto to pomnożenie tej ceny przez pewną liczbę p (np. dodanie 23% VAT to pomnożenie przez 1,23). $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – ceny towarów.
Koszt zakupu to
$p(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = px_1 + px_2 + \ldots + px_n$.

Dla dociekliwych

1. x – cena początkowa,
$1{,}25x$ – cena po podwyżce
$\frac{0{,}25x}{1{,}25x} = 0{,}2$, czyli 20%. Cenę należy obniżyć o 20%.

2. x – cena netto,
$1{,}05x$ – cena brutto,
$0{,}05x$ – podatek VAT
$\frac{0{,}05x}{1{,}05x} = \frac{5}{105} = \frac{1}{21}$, a $\frac{1}{21}$ to $\frac{100}{21}\% = 4\frac{16}{21}\% \approx 4{,}8\%$

dlanauczyciela.pl | Kartkówka IV.6

Powtórzenie podsumowuje wiedzę i umiejętności dotyczące wyrażeń algebraicznych. W zależności od stopnia ich opanowania przez uczniów warto pracę zindywidualizować, zwłaszcza że wspólne wykonywanie zadań mogłoby ich skutecznie znudzić i – co gorsza – zapewne nie przyniosłoby pożądanych skutków.
Przy powtórzeniach warto stosować metodę pracy grupowej: przygotowywać różne karty pracy, indywidualnie dobierać i/lub modyfikować zadania. Mogą to robić sami uczniowie.
Część lekcji można przeznaczyć na zabawę prawda/fałsz. Uczniowie kolejno czytają zdania, a wskazani przez nich koledzy dokonują oceny ich prawdziwości. Role należy zmieniać.
Zabawa nie może zająć całej lekcji. Jej część można przeznaczyć na wymyślanie zadań typu „kwadrat magiczny”, podając wcześniej rozmaite warunki.
Ciekawe bywają pomysły uczniów, jeśli polecamy im przygotowanie zadań tekstowych. Przykłady, które mogą posłużyć za wzór i stanowić pomoc, zawarto w testach. Możliwości uaktywnienia uczniów jest wiele. Jest to spore wyzwanie dla nauczyciela, ale korzyści z jego pokonania są nieporównanie większe niż w przypadku pracy przy tablicy z całą klasą (kiedy część uczniów nieodmiennie nie śledzi działań na tablicy).

Z. ĆWICZEŃ 1–10 1–3

ZB. ZADAŃ 1–18 1–4

Powtórzenie IV

ZESTAW 1

1. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego liczbę:

a) będącą sumą liczb x i 2,
b) będącą trzecią częścią liczby k,
c) 12 razy większą od różnicy liczb x i y,
d) o 3 mniejszą od podwojonej liczby a,
e) równą 40% liczby k,
f) o 25% mniejszą od liczby x.

2. W sadzie rosną jabłonie, wiśnie i grusze. Jabłoni jest x, wiśni jest dwa razy mniej niż jabłoni, a grusz – o pięć więcej niż wiśni. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile drzew rośnie w sadzie. Przedstaw zapisane wyrażenie w najprostszej postaci.

3. Oblicz wartość wyrażenia dla podanych wartości zmiennych.

a) $2x - 3y + 8$ dla $x = 4$, $y = -3$
b) $\frac{x-y}{x+y}$ dla $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$

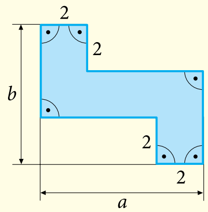
4. Uporządkuj jednomian.

a) $2x^3 \cdot 3x$
b) $\frac{1}{3}xy \cdot 6y^2$
c) $6b \cdot (-a)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)a^3b$

5. Dane wyrażenie algebraiczne przedstaw w najprostszej postaci.

a) $2a^2 - 3b + 6b + 5a$
b) $(5a + 3b) : \frac{1}{2}$
c) $2x(4x - 1) + 4x$

6. Na rysunku przedstawiono wielokąt, którego kolejne boki są prostopadłe.
Oceń prawdziwość każdego z poniższych zdań. Zapisz w zeszycie numery zdań i przy każdym z nich wstaw literę P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F, jeśli zdanie jest fałszywe.



I.	Obwód tego wielokąta opisuje wyrażenie $2a + 2b$.
II.	Pole tego wielokąta jest równe $ab - 4a + 8$.

7. Wyrażenie $5000 + 85xy$ opisuje całościowy koszt pewnego obozu (w złotych), gdzie x oznacza liczbę uczestników, a y czas trwania obozu (w dniach). Oblicz, ile zapłacono za tygodniowy pobyt na obozie 20 uczestników.

8. Spodnie kosztowały s złotych. Zapisz w postaci jednomianu, ile będą kosztowały po:
a) podwyżce o 15%,
b) obniżce o 15%.

Odpowiedzi

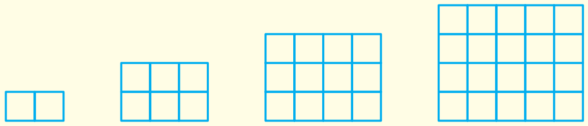
Zestaw 1 **1. a)** $x + 2$ **b)** $\frac{1}{3}k$ **c)** $12(x - y)$ **d)** $2a - 3$ **e)** $0{,}4k$ **f)** $0{,}75x$ **2.** $2x + 5$
3. a) 25 **b)** $\frac{1}{3}$ **4. a)** $6x^4$ **b)** $2xy^3$ **c)** $-3a^5b^2$ **5. a)** $2a^2 + 5a + 3b$ **b)** $10a + 6b$ **c)** $8x^2 + 2x$
6. I P, II P **7.** 16 900 zł **8. a)** $1{,}15s$ **b)** $0{,}85s$

Rozdział	I (18 godzin)							II (13 godzin)							III (28 godzin)											
Temat	1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	P
Godziny lekcyjne (razem 125)																										
Miesiące				IX				X						XI					XII					I		
Semestr														I – 59 godzin												

9. Sklep rowerowy oferuje 10% rabatu przy zakupie roweru i 5% rabatu przy zakupie kasku. Niech x oznacza cenę roweru przed rabatem, a y cenę kasku przed obniżką. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ile zapłacimy za rower i kask z rabatem.

ZESTAW 2

1. Z małych kwadratów o boku długości x tworzymy kolejno prostokąty w sposób pokazany na rysunku. Zapisz wzór na obwód i pole n-tego prostokąta.



2. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego:
a) sumę liczby dwa razy większej niż x i liczby o 30% mniejszej od y,
b) kwadrat różnicy 150% liczby a i 35% liczby b.

3. Która figura ma większe pole: prostokąt o bokach x i $x+2$ czy trapez o podstawach długości x oraz $x+2$ i wysokości x? Ile wynosi różnica tych pól?

4. Jedna z podstaw trapezu ma długość x, a druga jest od niej trzy razy dłuższa. Pole tego trapezu wynosi $4x^2$. Wyznacz wysokość tego trapezu.

5. Doprowadź dane wyrażenie do najprostszej postaci.
a) $(-2y)(3x+y)-2x(x-y)$ b) $2x-[1+(1-x)-(x+2)]$

6. W pewnej szkole w klasie 7a jest o 4 uczniów więcej niż w klasie 7b liczącej x uczniów, a w klasie 7c jest o 20% mniej uczniów niż w klasie 7a. Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego, ilu uczniów jest łącznie w tych trzech klasach. Wynik zapisz w najprostszej postaci.

7. Paweł kupił 3 napoje i 2 ciastka, a Monika 3 ciastka i 2 napoje. Napój kosztuje x zł, a ciastko jest od niego droższe o 20%. Zapisz wyrażenie algebraiczne opisujące, o ile więcej zapłaci Monika od Pawła.

8. Cenę nart obniżono po sezonie o 20%, a potem jeszcze o 25%. O ile procent łącznie zmniejszyła się ta cena?

9. Ania zastanawiała się, czy kupić książkę z zagranicznej księgarni wysyłkowej. Zanim się zdecydowała, wyrażona w euro cena wraz z wysyłką została obniżona o 10%, ale euro zdrożało o 5%. O ile procent mniej zapłaci Ania za książkę wraz z wysyłką, jeśli teraz zdecyduje się na zakup?

Odpowiedzi

Zestaw 1 **9.** $0{,}9x+0{,}95y$ **Zestaw 2** **1.** obwód: $4nx+2x$, pole: $n^2x^2+nx^2$ **2. a)** $2x+0{,}7y$ **b)** $(1{,}5a-0{,}35b)^2$ **3.** prostokąt, o x **4.** $2x$ **5. a)** $-2x^2-2y^2-4xy$ **b)** $4x$ **6.** $2{,}8x+7{,}2$ **7.** $0{,}2x$ **8.** o 40% **9.** o 5,5%

IV (18 godzin)							V (16 godzin)						VI (13 godzin)					VII (11 godzin)					Łączna liczba godzin do dyspozycji nauczyciela
1	2	3	4	5	6	P	1	2	3	4	5	P	1	2	3	4	P	1	2	3	4	P	

II	III	IV	V	VI

II – 63 godziny

Zadania na temat... wskazują nowy obszar wykorzystywania wyrażeń algebraicznych. Może się zdarzyć, że nie wszyscy uczniowie będą wiedzieć, co to są związki chemiczne. Wtedy lepiej pozostawić te zadania do wykorzystania w innym, bardziej odpowiednim czasie, lub zaplanować wspólną lekcję z nauczycielem chemii.

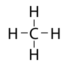
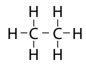
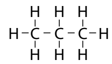
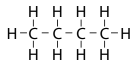
Zadania na temat…

Węglowodory

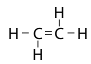
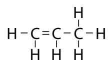
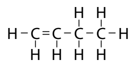
Węglowodory to związki chemiczne węgla i wodoru. Stanowią one ważne źródło energii.

Węglowodory można uporządkować, gromadząc w jednej grupie związki o podobnych wzorach, ale różniące się liczbą atomów węgla (C) i wodoru (H). Mówimy, że węglowodory tworzą szeregi. Poniżej przedstawiono trzy takie szeregi oraz przykłady związków chemicznych, które do nich należą.

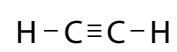
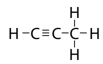
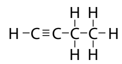
Alkany

	metan	etan	propan	butan
wzór sumaryczny	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	C_4H_{10}
wzór strukturalny				

Alkeny

	eten	propen	buten
wzór sumaryczny	C_2H_4	C_3H_6	C_4H_8
wzór strukturalny			

Alkiny

	etyn	propyn	butyn
wzór sumaryczny	C_2H_2	C_3H_4	C_4H_6
wzór strukturalny			

Gaz ziemny składa się głównie z metanu.

Gaz w butlach to mieszanina propanu i butanu.

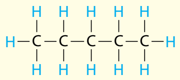
Benzyna to mieszanina wielu różnych węglowodorów.

1. Czym się różnią wzory sumaryczne etanu, etenu i etynu?
2. Kolejny alkan w szeregu to pentan. Jak się nazywają kolejne: alken i alkin? Zapisz wzory sumaryczne wszystkich trzech związków.
3. Ogólny wzór sumaryczny alkinów ma postać C_nH_{2n-2}. Wyjaśnij, dlaczego gdy atomów węgla jest n, to atomów wodoru jest $2n - 2$.
4. Zapisz w analogiczny sposób ogólne wzory sumaryczne alkanów i alkenów.
5. Dekan, deken i dekin mają po 10 atomów węgla. Ile atomów wodoru ma każdy z nich? Zapisz ich wzory sumaryczne.

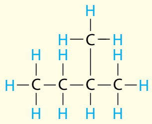
Izomery

Pięć atomów węgla i dwanaście atomów wodoru tworzących pentan (C_5H_{12}) nie zawsze łączy się tak samo. Istnieją trzy możliwości:

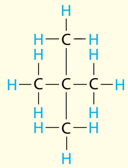
I.



II.



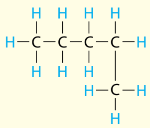
III.



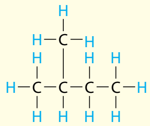
6. Czym się różnią powyższe trzy wzory strukturalne?

Przedstawione wyżej związki nazywamy izomerami C_5H_{12}. Nie istnieje więcej takich izomerów. Na ilustracji A przedstawiono ten sam izomer co na rysunku I, ponieważ istotne są połączenia między atomami, a nie ich rozmieszczenie graficzne.

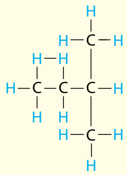
A.



B.



C.



7. Na którym rysunku: I, II czy III przedstawiono ten sam izomer C_5H_{12} co na rysunku B?
8. Na którym rysunku: I, II czy III przedstawiono ten sam izomer C_5H_{12} co na rysunku C?
9. Butan ma dwa izomery. Narysuj ich wzory strukturalne.
10. Narysuj wzory strukturalne wszystkich pięciu izomerów heksanu C_6H_{14}.

Odpowiedzi

1. liczbą atomów wodoru **2.** pentan: C_5H_{12}, penten: C_5H_{10}, pentyn C_5H_8
4. alkany: C_nH_{2n+2}, alkeny: C_nH_{2n} **7.** II **8.** III

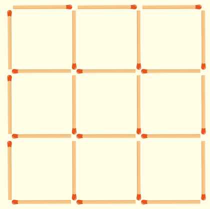
Zadanie z izomerami możemy potraktować jak łamigłówkę, ćwiczącą wyobraźnię geometryczną. Niezależnie od tego, jak rozmieścimy atomy – jeśli połączenia między nimi są takie same, to zawsze jest to ten sam związek.

Zadania na deser z pewnością ucieszą uczniów zainteresowanych matematyką. Każdy przedstawiony temat może być inspiracją do poszukiwania w różnych źródłach równie ciekawych zadań. Każde zadanie stanowi swego rodzaju zagadkę. Są one okazją do wprawiania się w sztuce dowodzenia, na co niestety zazwyczaj brak czasu na lekcjach. Można też zaplanować konkurs na opracowanie ciekawych zadań z wykorzystaniem wyrażeń algebraicznych.

Zadania na deser

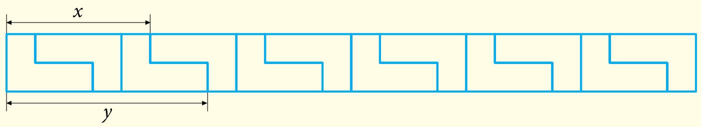
Wzory i wzorki

1. Na rysunku przedstawiono kwadrat ułożony z zapałek, który ma 3×3 oczka.



a) Ile zapałek potrzeba do ułożenia kwadratu mającego 5×5 oczek?
b) Ile zapałek potrzeba do ułożenia kwadratu mającego $n \times n$ oczek?
c) Ile oczek będzie miał kwadrat ułożony w podobny sposób z 220 zapałek? Zapisz odpowiednie wyrażenie algebraiczne i spróbuj odgadnąć, kiedy ma ono wartość 220.

2. Pas ziemi oddzielający trawnik od ścieżki rowerowej podzielono na jednakowe rabaty kwiatowe w kształcie litery L, tak jak na rysunku poniżej.



Korzystając z informacji podanych na rysunku, zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego długość tego pasa ziemi, gdy rabatek jest:
a) 12 (jak na rysunku), b) 912, c) 1000, d) $2n$.

3. Drewniany sześcienny klocek o krawędzi 3 cm pomalowano na zielono, a następnie pocięto na sześcienne kostki o krawędzi 1 cm każda. Spośród tych kostek sześć ma jedną ścianę zieloną, a dwanaście – dwie ściany zielone. Ile kostek o krawędzi 1 cm z jedną ścianą zieloną, a ile z dwiema ścianami zielonymi otrzymano by, gdyby wyjściowy klocek miał krawędź długości:
a) 4 cm, b) n cm, gdzie $n \geqslant 3$?

Procenty

Wskazówka. Przed rozwiązaniem zadań zapoznaj się z ramką „Dla dociekliwych" na s. 213.

4. Długość jednego boku prostokąta zmniejszono o 25%. O ile procent należy zwiększyć długość drugiego boku prostokąta, aby jego pole pozostało takie samo?

5. Jola ma o 50% więcej sukienek niż Ola. O ile procent mniej sukienek ma Ola?

6. a) Cenę jabłek obniżono o 20%. O ile procent należy podnieść ich obecną cenę, aby była równa cenie początkowej?
b) Cenę deficytowego towaru podniesiono o 60%. O ile procent należy ją obniżyć, aby była równa cenie początkowej?

Odpowiedzi

1. a) 60 **b)** $2n(n+1)$ **c)** $10 \cdot 10 = 100$ **2. a)** $2x+2y$ **b)** $152(x+y)$ **c)** $166\frac{2}{3}(x+y)$ **d)** $\frac{n}{3}(x+y)$
3. a) 24 – jedną, 24 – dwie **b)** $6(n-2)^2$ – jedną, $12(n-2)$ – dwie **4.** zwiększyć o $33\frac{1}{3}$%
5. o $33\frac{1}{3}$% mniej **6. a)** o 25% **b)** o 37,5%

7. Cena nart przed sezonem wzrosła o 16%. O jaki procent należałoby obniżyć nową cenę po sezonie, aby narty kosztowały tyle samo co przed sezonem? Wynik zaokrąglij do 1%.

Podzielność liczb

Wskazówka. Przed rozwiązaniem zadań zapoznaj się z ramkami „Dla docieklliwych” na s. 192 i 200.

8. W wyrażeniach w ramce zmienna n oznacza liczbę naturalną. Wybierz z ramki liczby
a) podzielne przez 3 dla każdego n,
b) niepodzielne przez 3 dla żadnego n,
c) podzielne przez 3 dla niektórych n.

$3n \quad 6n+2 \quad 3n+1 \quad 6n \quad 4n \quad 6(n+2)$

9. Uzasadnij, że liczba trzycyfrowa, której cyfry są kolejnymi liczbami naturalnymi, jest podzielna przez 3.

10. Uzasadnij, że suma pięciu kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 3 jest podzielna przez 15.

11. Uzasadnij, że jeśli od dowolnej czterocyfrowej liczby naturalnej odejmiemy sumę jej cyfr, to otrzymamy liczbę podzielną przez 9.

12. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba
$$n(n-5)-n(n-3)-4(n-3)$$
jest podzielna przez 6.

Wartości wyrażeń

13. Dla jakich liczb x podane wyrażenie ma wartości dodatnie, dla jakich ujemne, a dla jakich – wartość 0?

a) $\frac{(5-2x)^2}{8-2^2}$ b) $\frac{(x-3)^2}{-2-(-1)^3}$

14. a) Dla pewnych liczb a i b $(b \neq 0)$ wartość wyrażenia $\frac{a-1}{b}$ jest równa 4. Ile wynosi wartość wyrażenia $\frac{3a-3}{b}$ dla tych samych liczb a i b?

b) Dla pewnych liczb a i b $(a \neq 1,\ b \neq 0)$ wartość wyrażenia $\frac{a-1}{b}$ jest równa 5. Ile wynosi wartość wyrażenia $\frac{2a-2}{b}-\frac{10b}{a-1}$ dla tych samych liczb a i b?

Odpowiedzi

7. ok. 14% **8. a)** $3n$, $6n$, $6(n+2)$ **b)** $3n+1$, $6n+2$ **c)** $4n$ **13. a)** wartość 0 dla $x=2{,}5$, dla pozostałych dodatnie **b)** wartość 0 dla $x=3$, dla pozostałych ujemne **14. a)** 12 **b)** 8